Fourier-Transformation

Andreas Brüggemann & Lukas Westhofen

17. Oktober, 2017

Inhalt

Inhalt

Einleitung

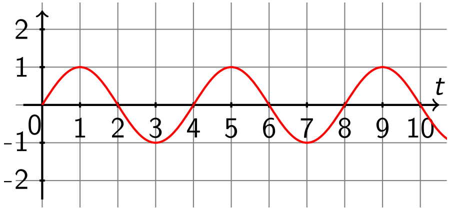
- Signaldarstellung
- Fourier-Transformation
- Signalräume

Signaldarstellung: Was ist ein Signal?

- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?

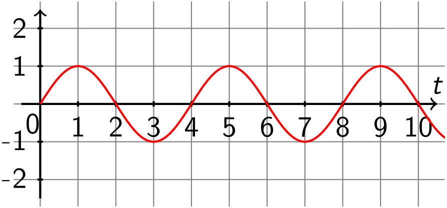
Signaldarstellung: Was ist ein Signal?

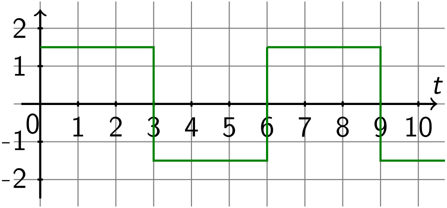
- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?



Signaldarstellung: Was ist ein Signal?

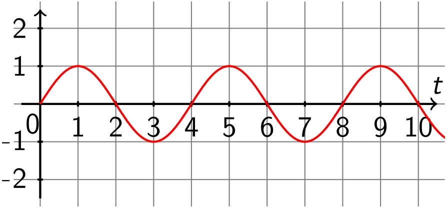
- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?

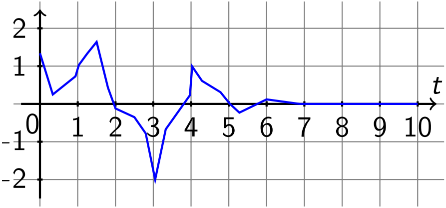


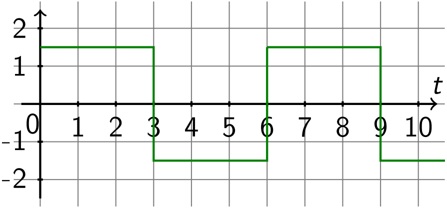


Signaldarstellung: Was ist ein Signal?

- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?

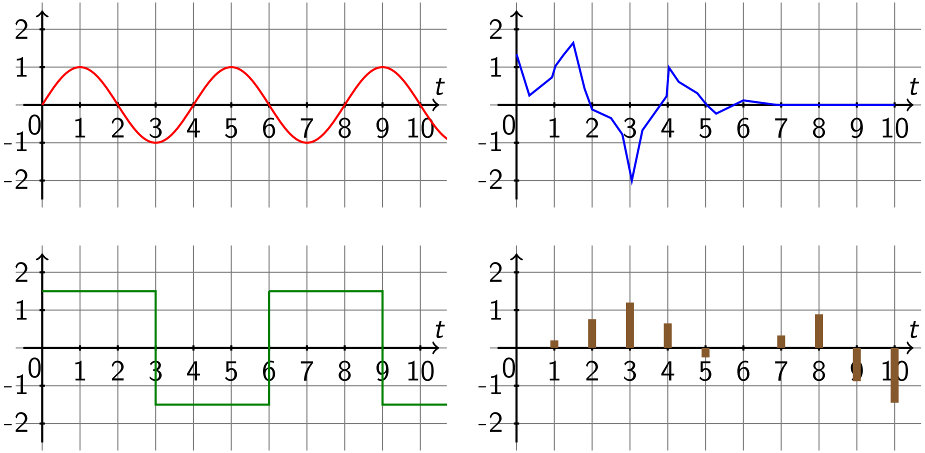




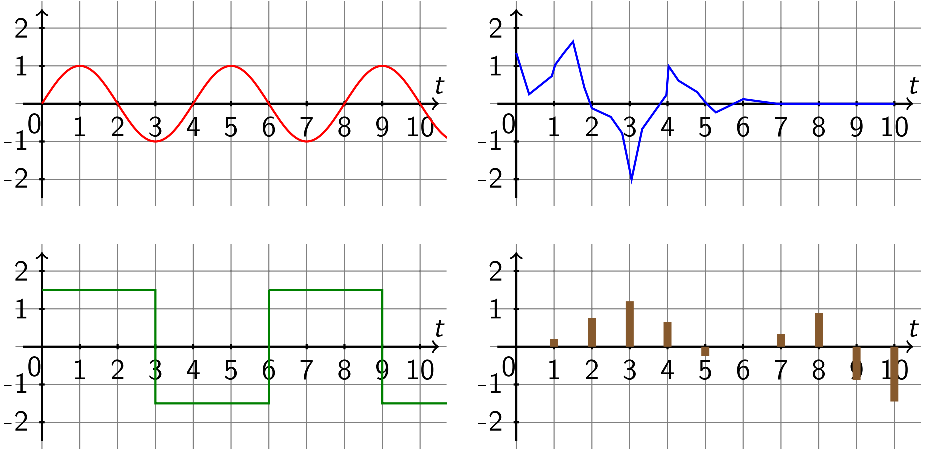


Signaldarstellung: Was ist ein Signal?

- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?



- Repräsentieren folgende Funktionen Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?



- Ja, denn die Funktionen sind Signale.

Signaldarstellung: Zeitdomäne

- Signale sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, die die Zeit t auf einen reellen Funktionswert $f(t)$ abbilden und *messbar* sind.
- $f(t)$ repräsentiert eine physikalische Größe, z.B. den Luftdruck der Schallwelle (in dB) oder die Stromspannung eines analogen Signals (in V).

Zeitdomäne

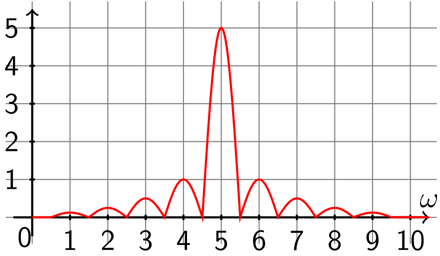
Sei $R := \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ gegeben.
Wird ein Signal $f : R \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt, so ist f eine Funktion der **Zeitdomäne**.

Signaldarstellung: Was ist ein Spektrum?

- Repräsentieren folgende Funktionen ebenfalls Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?

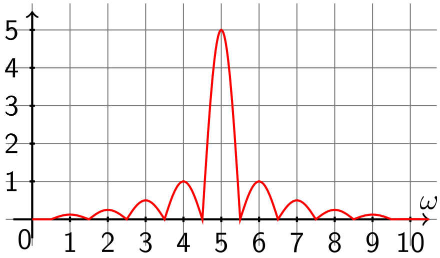
Signaldarstellung: Was ist ein Spektrum?

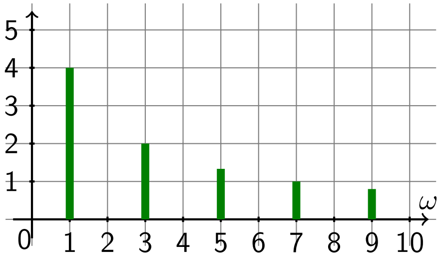
- Repräsentieren folgende Funktionen ebenfalls Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?



Signaldarstellung: Was ist ein Spektrum?

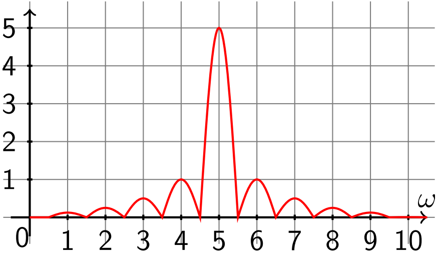
- Repräsentieren folgende Funktionen ebenfalls Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?

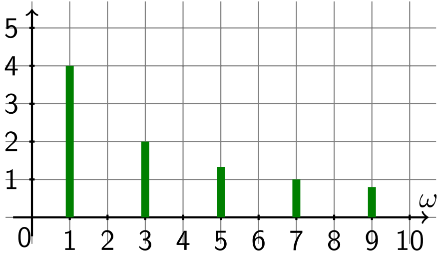




Signaldarstellung: Was ist ein Spektrum?

- Repräsentieren folgende Funktionen ebenfalls Signale (z.B. einzelne Töne oder Musik)?





- Ja, denn es sind die Spektren der jeweiligen Funktion.

Signaldarstellung: Frequenzdomäne

- Das Spektrum eines Signals ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, die die Frequenz ω auf einen reellen Funktionswert $f(\omega)$ abbildet.
- $f(\omega)$ beschreibt die Amplitude der Schwingungen mit der Frequenz ω.

Frequenzdomäne

Sei $R := \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ gegeben.
Das Spektrum $f : R \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto f(\omega)$ eines Signals ist eine Funktion der **Frequenzdomäne**.

Signaldarstellung: Spektrogramme

Gibt es eine Möglichkeit Zeit- und Frequenzdomäne in einer Darstellung zu vereinen?

Signaldarstellung: Spektrogramme

Gibt es eine Möglichkeit Zeit- und Frequenzdomäne in einer Darstellung zu vereinen?

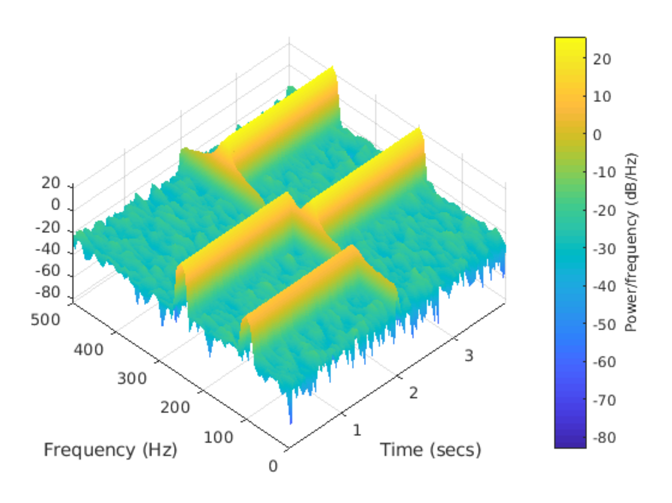
Spektrogramm

Ein **Spektrogramm** ist ein zwei- bzw. dreidimensionales Diagramm, welches die Frequenzen eines Signals in Abhängigkeit der Zeit darstellt.

Die x-Achse beschreibt die Zeit t, die y-Achse die Frequenz ω und die farbliche Kodierung bzw. die z-Achse zeigt die Amplitude (Intensität) der Frequenz an.

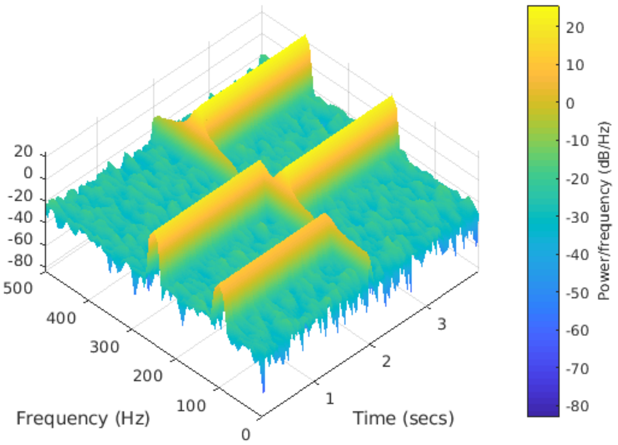
Spektrogramm

Beispiel



Welche Frequenzen sind im Signal dominant?:

Beispiel

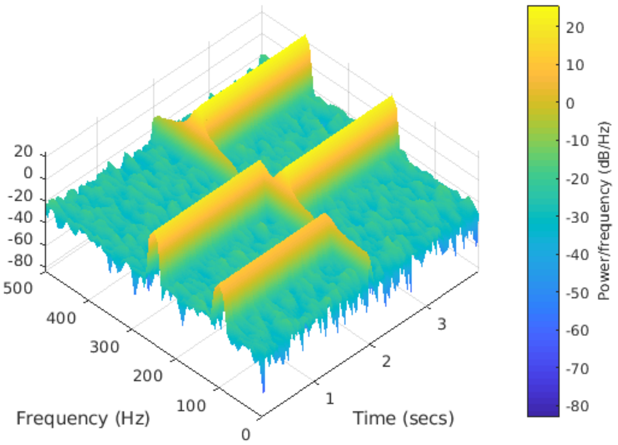


Welche Frequenzen sind im Signal dominant?:

- $\omega_1 = 100\mathrm{Hz}$

Spektrogramm

Beispiel

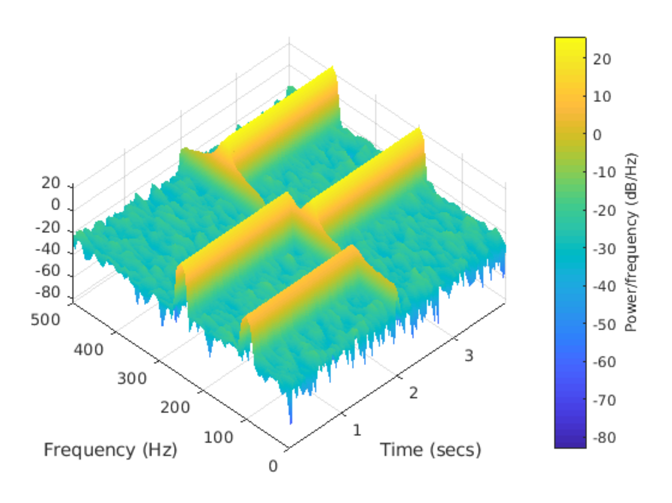


Welche Frequenzen sind im Signal dominant?:

- $\omega_1 = 100\text{Hz}$
- $\omega_2 = 250\text{Hz}$

Spektrogramm

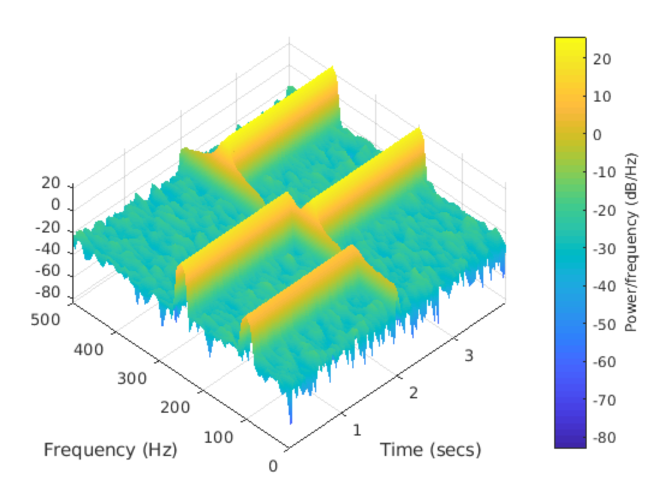
Beispiel



Welche Frequenzen sind im Signal dominant?:

- $\omega_1 = 100\text{Hz}$
- $\omega_2 = 250\text{Hz}$
- $\omega_3 = 200\text{Hz}$

Beispiel



Welche Frequenzen sind im Signal dominant?:

- $\omega_1 = 100\mathrm{Hz}$
- $\omega_2 = 250\mathrm{Hz}$
- $\omega_3 = 200\mathrm{Hz}$
- $\omega_4 = 400\mathrm{Hz}$

Einleitung: Fourier-Transformation

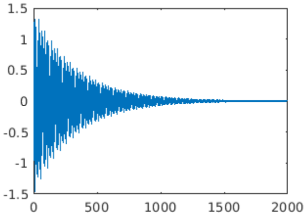
Fourier-Transformation

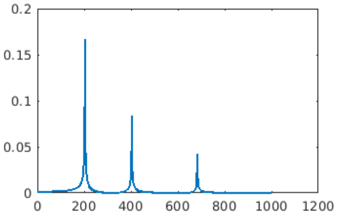
Die **Fourier-Transformation** ist ein mathematisches Werkzeug, um ein Signal von der *Zeit-* in die *Frequenzdomäne* zu transformieren und umgekehrt:

Einleitung: Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

Die **Fourier-Transformation** ist ein mathematisches Werkzeug, um ein Signal von der *Zeit-* in die *Frequenzdomäne* zu transformieren und umgekehrt:





Fourier-Transformation: Anwendungen

Die Fourier-Transformation wird in der Musikverarbeitung unter Anderem für:

- die Spektralanalyse von Signalen,
- die Analyse von Musik ($\rightarrow$ *Pitch and Chord Recognition*)
- das Filtern von Signalen
- die Implementierung von Equalizer

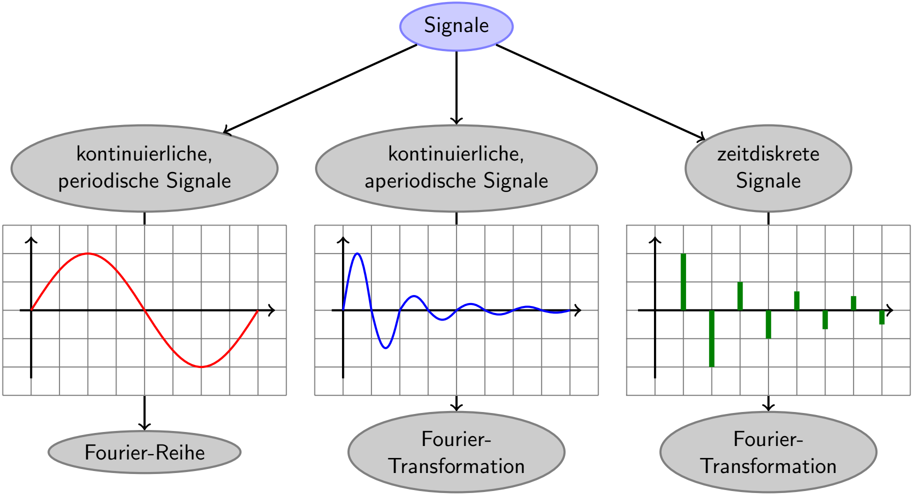
benutzt.

Weiterhin findet die Fourier-Transformation Anwendung in Bereichen wie:

- Bildverarbeitung,
- Magnetresonanztomographie.

Signalräume

Um Signale in Spektren zu zerlegen, teilen wir die Signale in drei Signalräume:



Mathematische Grundlagen

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Satz von Euler
- Polardarstellung
- Vektorräume von Funktionen

Mathematische Grundlagen: Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Definition: $\mathbb{C}$

Die Menge $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** ist gegeben durch:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei $i^2 = -1$ gilt. Der *Real-* und *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist gegeben durch:

$$\mathrm{Re}(z) := x, \quad \mathrm{Im}(z) := y$$

Der *Betrag* von z ist gegeben durch:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mathematische Grundlagen: Satz von Euler

Satz: Euler-Identität

Die Euler-Identität ist gegeben durch:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Daraus folgt die Darstellung von Sinus und Kosinus:

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$
$$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Mathematische Grundlagen: Polardarstellung

$z \in \mathbb{C}$ kann zur Repräsentation zweier Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ genutzt werden. Diese können als Real- und Imaginärteil kodiert sein oder als:

Polardarstellung

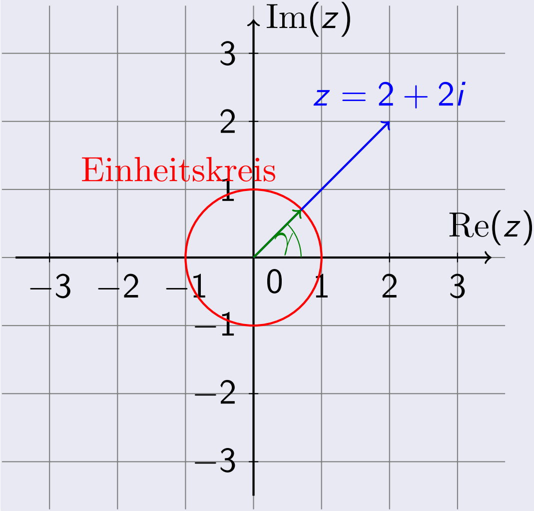
Sei $|z|, \gamma \in \mathbb{R}$, dann ist:

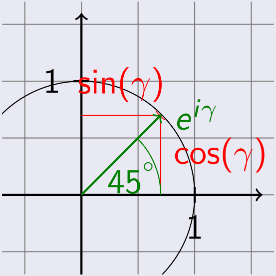
$$z = |z| \cdot e^{i\gamma} \in \mathbb{C}$$

die **Polardarstellung** von z, wobei $|z|$ der *Betrag* von z ist und γ der Winkel von z bezüglich des *Einheitskreises* ist. Aus der Polardarstellung folgt:

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \{|z| \cdot e^{i\gamma} \,|\, |z|, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Zusammenhang zwischen Polardarstellung, Real- und Imaginärteil





Jeder Punkt der *Gausschen Zahlenebene* kann als Kombination eines Vektor im Einheitskreis mit Winkel γ und eines Skalars $|z|$ dargestellt werden.

Lineare Funktionenräume

Es sind $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ **lineare Funktionenräume**. Diese Funktionenräume sind Vektorräume mit Funktionen als Elemente:

$$\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{\, f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$$
$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} = \{\, f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$$

Die *Addition* und *Skalarmultiplikation* sind definiert als:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

Fourier-Reihe

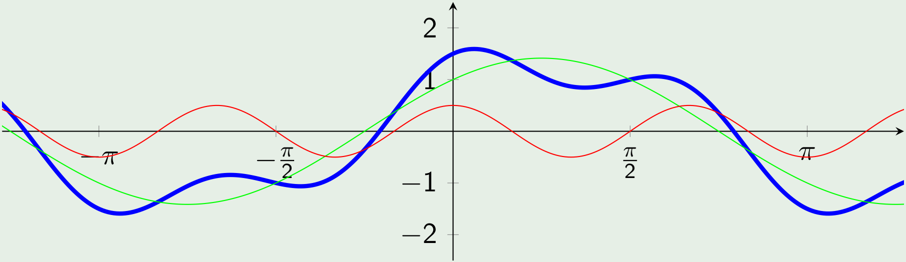
- $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi))$
- Satz von Fourier
- Fourier-Reihe
- Komplexe Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation für $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi))$

Fourier-Reihe: $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi))$

2π-periodische Signale

$$\textit{Hilbertraum}: \mathcal{L}^2([-\pi,\pi)) \subseteq \mathbb{C}^{[-\pi,\pi)}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Beispiel



Fourier-Reihe: Satz von Fourier

Satz von Fourier

Jede periodische Schwingung lässt sich als Summe von *Sinus- und Kosinusschwingungen* beschreiben

Basis des $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi))$

$$\{1, cos(nt), sin(nt) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Beispiel

$$f(t) = sin(t) + cos(t) + 0.5 \cdot cos(3t)$$

Reihendarstellung

Für $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi))$ existieren a_0 und a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$$

Beispiel

$$a_1 = 1, a_3 = 0.5, b_1 = 1$$

Fourier-Reihe

Fourier Repräsentation

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$$

Fourier Transformation

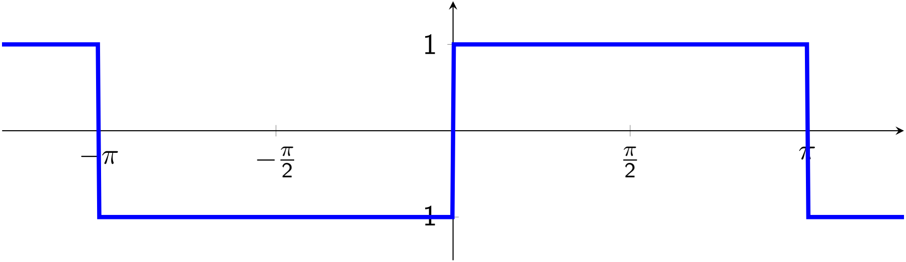
Für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

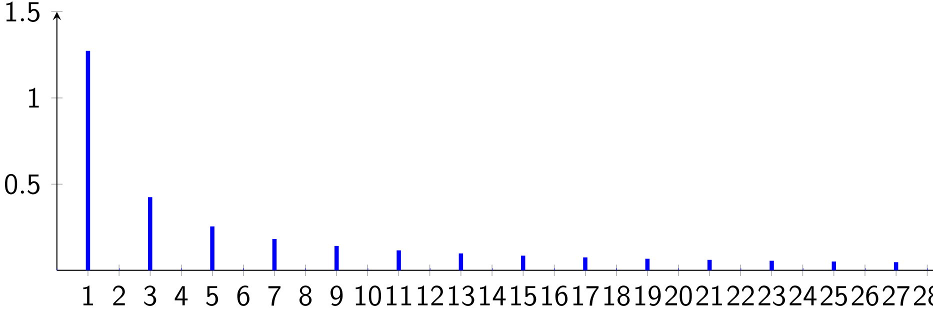
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(nt)dt$$

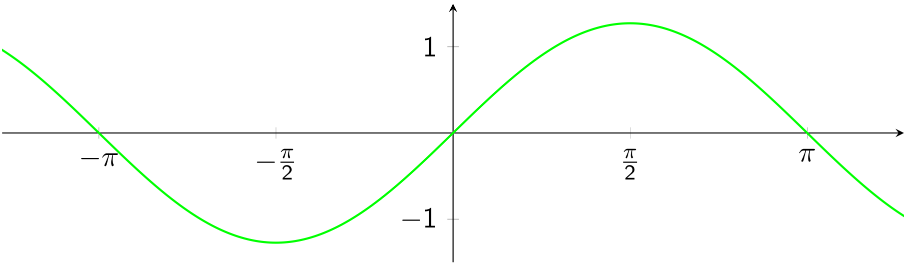
Fourier-Reihe



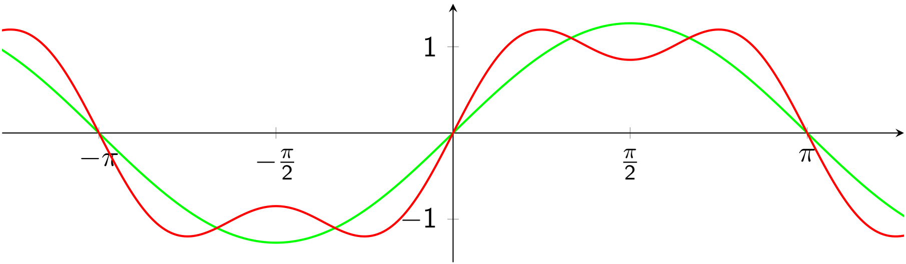
Fourier-Reihe



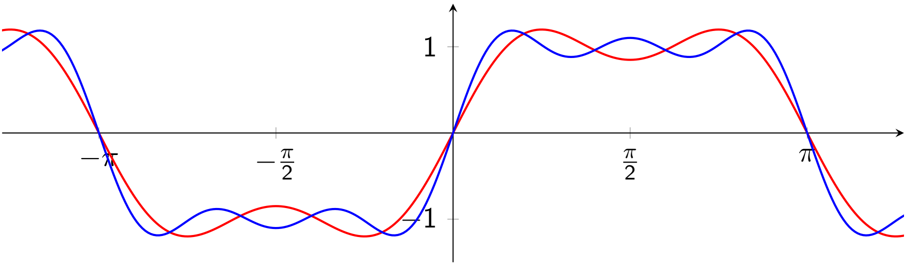
Fourier-Reihe



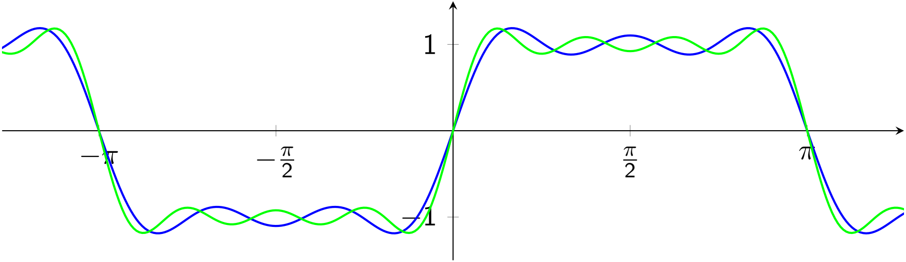
Fourier-Reihe



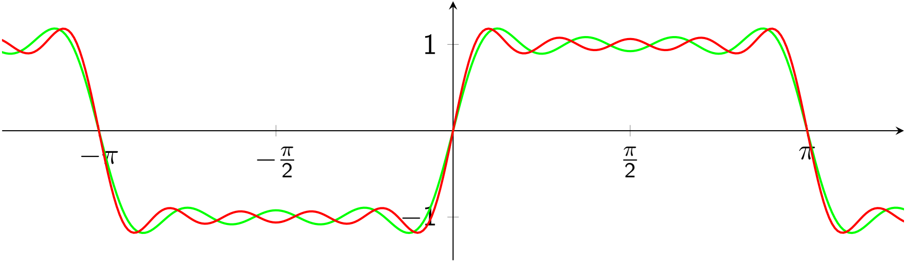
Fourier-Reihe



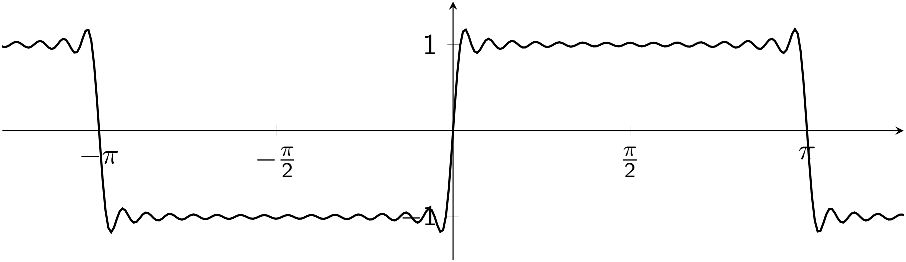
Fourier-Reihe



Fourier-Reihe



Fourier-Reihe



Fourier-Reihe: Komplexe Fourier-Reihe

Komplexe Darstellung, $T = 2\pi$, Fourier Repräsentation

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$$

Fourier-Reihe: Komplexe Fourier-Reihe

Komplexe Darstellung, $T = 2\pi$, Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ikt}$$

Fourier-Reihe: Komplexe Fourier-Reihe

Komplexe Darstellung, $T = 2\pi$, Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty, \infty)} c_k \cdot e^{ikt}$$

Fourier Transformation

Für $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt$

Fourier-Reihe: Komplexe Fourier-Reihe

Komplexe Darstellung, $T = 2\pi$, Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kt) + b_k sin(kt))$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty, \infty)} c_k \cdot e^{ikt}$$

Fourier Transformation

Für $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt$

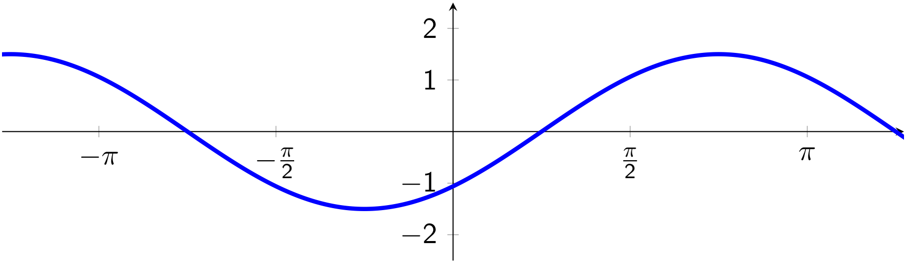
Für $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt$$

Fourier-Reihe

Rechenbeispiel:

$f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}, t \mapsto 1.5 \sin(t - \frac{\pi}{4})$



$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1.5 \cdot sin(t - \frac{\pi}{4}) \cdot e^{-it} dt = -\frac{1.5\sqrt{2}}{4} - \frac{1.5\sqrt{2}}{4} i$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1.5 \cdot sin(t - \frac{\pi}{4}) \cdot e^{it} dt = -\frac{1.5\sqrt{2}}{4} + \frac{1.5\sqrt{2}}{4} i$$

Fourier-Reihe: Eigenschaften

Eigenschaften der komplexen Fourier Koeffizienten

Falls f nur auf reelle Werte abbildet, gilt:

$$c_k = \overline{c_{-k}}$$

Somit kodieren die positiven und negativen Frequenzen die (fast) gleiche Information, denn es gilt:

$$\sum_{k \in (-\infty, \infty)} c_k \cdot e^{ikt} = f(t) = \overline{f(t)} = \sum_{k \in (-\infty, \infty)} \overline{c_k} \cdot e^{-ikt}$$

Nun besitzen wir komplexe Fourier Koeffizienten, aus denen wir die:

- Amplitude l_k
- Phasenverschiebung ϕ_k

bestimmen können und somit $f(t)$.
Wir berechnen die Amplitude:

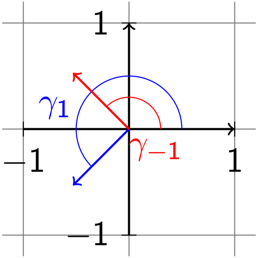
$$l_1 = |c_1| = \sqrt{\left(-\frac{1.5\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1.5\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.25 \cdot 2}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2.25}}{2} = 0.75 = |c_{-1}| = l_{-1}$$

Fourier-Reihe

Wir formen unsere Koeffizienten in die Polardarstellung um und lesen den Winkel ab.

$$\phi_1 = -\frac{3}{4}\pi, \phi_{-1} = \frac{3}{4}\pi$$
$$c_1 \cdot e^{it} = l_1 e^{i\phi_1} \cdot e^{it}$$
$$= 0.75 e^{i(t+5\pi/4)} = 0.75 e^{i(t-3\pi/4)}$$
$$c_{-1} \cdot e^{-it} = l_{-1} e^{i\phi_{-1}} \cdot e^{-it}$$
$$= 0.75 e^{-i(t-3\pi/4)}$$



Damit folgt dann:

$$f(t) = c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it} = 0.75 \cdot e^{i(t-3\pi/4)} + 0.75 \cdot e^{-i(t-3\pi/4)}$$
$$= 1.5 \sin(t - \frac{\pi}{4})$$

Komplexe Darstellung, $T > 0$ beliebig, Fourier Repräsentation

$$f(t) = \sum_{k\in(-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ikt}$$

Fourier-Reihe: Komplexe Darstellung $T > 0$

Komplexe Darstellung, $T > 0$ beliebig, Fourier Repräsentation

$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ikt}$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ik\omega_0 t}$$

Fourier-Reihe: Komplexe Darstellung $T > 0$

Komplexe Darstellung, $T > 0$ beliebig, Fourier Repräsentation

$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ikt}$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ik\omega_0 t}$$

Fourier Transformation

Für $k \in \mathbb{Z}$: $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt$

Fourier-Reihe: Komplexe Darstellung $T > 0$

Komplexe Darstellung, $T > 0$ beliebig, Fourier Repräsentation

$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ikt}$

$$f(t) = \sum_{k \in (-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ik\omega_0 t}$$

Fourier Transformation

Für $k \in \mathbb{Z}$: $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Fourier Transformation

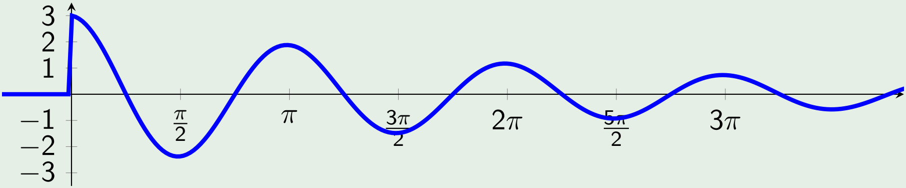
- $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
- Herleitung
- Beispiele

Fourier-Transformation: $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Aperiodische Signale

$$\textit{Hilbertraum}: \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Beispiel



$f(t) = 3 \cdot cos(2t) \cdot e^{-0.15t} \cdot H(t)$

Fourier-Transformation: Herleitung

Notwendige Umformungen

$$f(t) = \sum_{k\in(-\infty,\infty)} c_k \cdot e^{ik\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in(-\infty,\infty)} \frac{\sqrt{2\pi}\Delta\omega}{\Delta\omega} \cdot c_k \cdot e^{ik\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in(-\infty,\infty)} F(\omega_k) \cdot e^{i\omega_k t} \cdot \Delta\omega$$

$$F(\omega_k) = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot c_k}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot Tc_k}{2\pi} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i\omega_k t} dt$$

$T \to \infty$

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in(-\infty,\infty)} F(\omega_k) \cdot e^{i\omega_k t} \cdot \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i\omega_k t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Fourier-Transformation: Rechenbeispiel

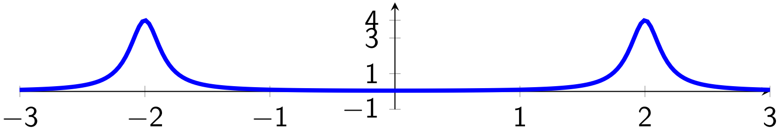
$$
\begin{aligned}
f(t) &= 3 \cdot cos(2t) \cdot e^{-0.15t} \cdot H(t) \\
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 3 \cdot cos(2t) \cdot e^{-0.15t} \cdot H(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} 3 \cdot cos(2t) \cdot e^{-0.15t} \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} (e^{2it} + e^{-2it}) \cdot e^{-0.15t} \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{2it-0.15t-i\omega t} + e^{-2it-0.15t-i\omega t} dt \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{(2i-0.15-i\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-2i-0.15-i\omega)t} dt \right)
\end{aligned}
$$

Fourier-Transformation: Rechenbeispiel

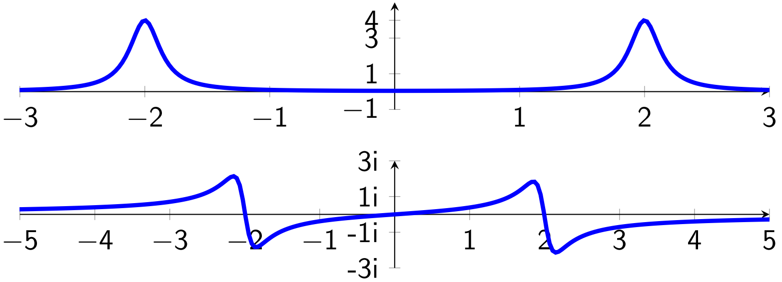
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^\infty e^{(2i-0.15-i\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{(-2i-0.15-i\omega)t} dt \right) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} (\left[\frac{1}{2i-0.15-i\omega} e^{(2i-0.15-i\omega)t} \right]_0^\infty \\
&+ \left[\frac{1}{-2i-0.15-i\omega} e^{(-2i-0.15-i\omega)t} \right]_0^\infty) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(0 - \frac{1}{2i-0.15-i\omega} + 0 - \frac{1}{-2i-0.15-i\omega} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(0 - \frac{1}{2i - 0.15 - i\omega} + 0 - \frac{1}{-2i - 0.15 - i\omega} \right) \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(- \frac{1}{2i - 0.15 - i\omega} - \frac{1}{-2i - 0.15 - i\omega} \right) \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-0.15 + (2-\omega)i} + \frac{1}{-0.15 - (2+\omega)i} \right) \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-0.15 - (2-\omega)i}{0.15^2 + (2-\omega)^2} + \frac{-0.15 + (2+\omega)i}{0.15^2 + (2+\omega)^2} \right)
\end{aligned}
$$

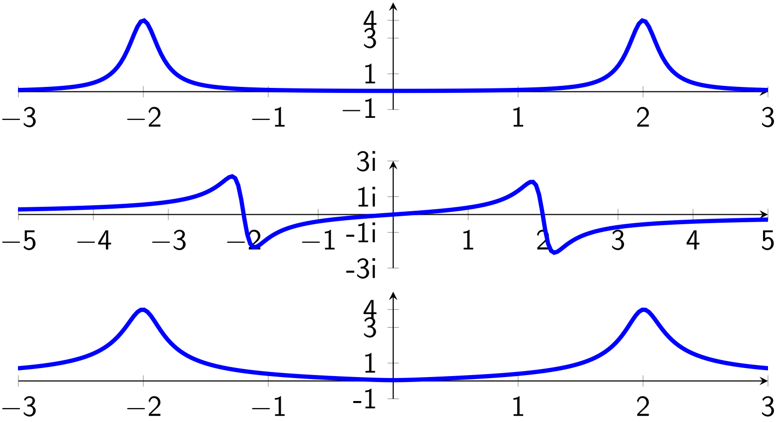
Fourier-Transformation



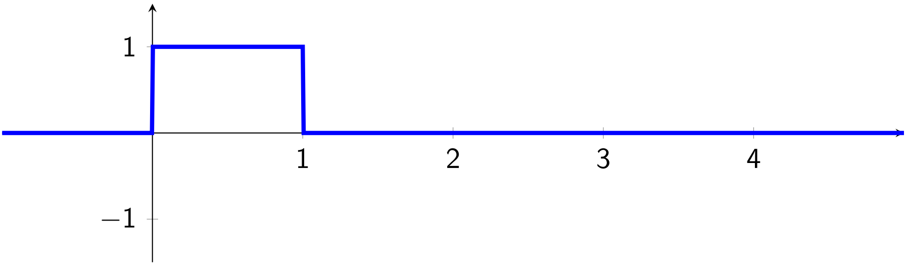
Fourier-Transformation



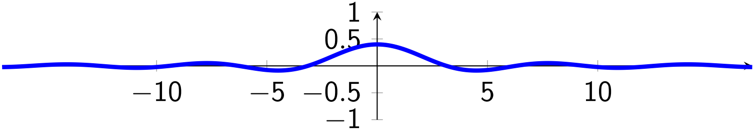
Fourier-Transformation



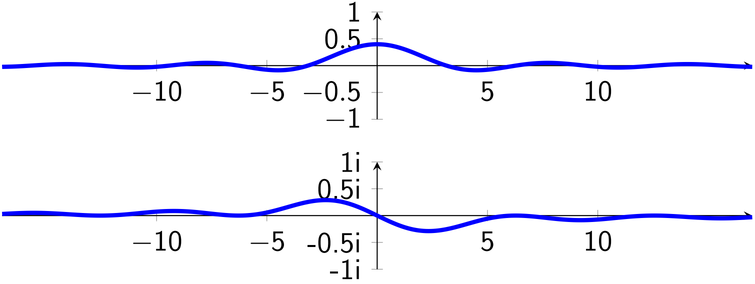
Fourier-Transformation



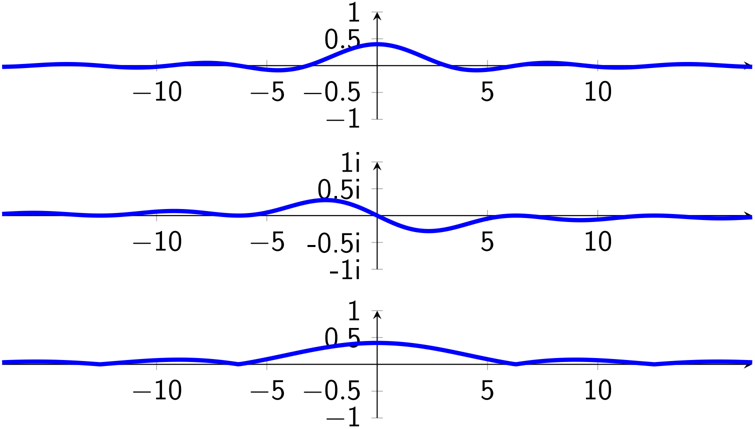
Fourier-Transformation



Fourier-Transformation



Fourier-Transformation



Diskrete Fourier Transformation

- $\ell^2(\mathbb{Z}/N)$
- Diskrete Fourier-Transformation
- Laufzeit

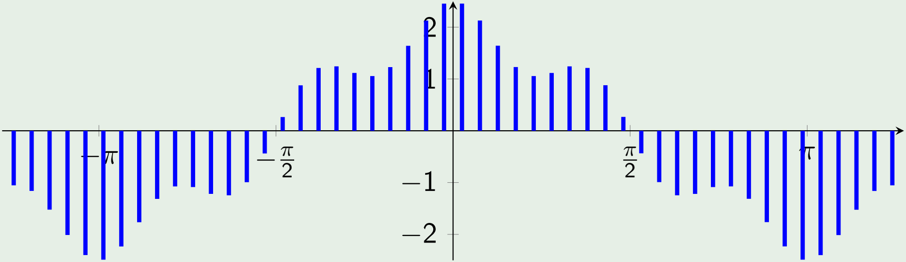
DFT: $\ell^2(\mathbb{Z}/N)$

Diskrete Signale

$$\textit{Hilbertraum}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}/N), \sum_{k=0}^{N-1} |f\left(k \cdot \frac{T}{N}\right)|^2 < \infty$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}/N) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N}$$

Example



DFT

Für $0 \leq k, j < N$:

Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$

DFT

Für $0 \leq k, j < N$:

Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(j\omega_0) \cdot e^{2ik\pi \frac{j}{N}}$$

Fourier Transformation

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

DFT

Für $0 \leq k, j < N$:

Fourier Repräsentation

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(j\omega_0) \cdot e^{2ik\pi \frac{j}{N}}$$

Fourier Transformation

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

$$F(j\omega_0) = \frac{T}{\sqrt{2\pi} N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) \cdot e^{-2ij\pi \frac{k}{N}}$$

DFT: Laufzeit

Transformationsformeln

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(j\omega_0) \cdot e^{2ik\pi\frac{j}{N}}$$

$$F(j\omega_0) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) \cdot e^{-2ij\pi\frac{k}{N}}$$

Laufzeit

$$\Rightarrow O(N^2)$$

DFT: Laufzeit

Transformationsformeln

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(j\omega_0) \cdot e^{2ik\pi\frac{j}{N}}$$

$$F(j\omega_0) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) \cdot e^{-2ij\pi\frac{k}{N}}$$

Laufzeit

$$\Rightarrow O(N^2)$$

Es existiert ein Divide-And-Conquer-Algorithmus mit Laufzeit:

$$O(N \cdot log(N))$$

Short Time Fourier-Transformation

- Definition
- Spektrogramme

Short Time Fourier-Transformation: Probleme der Fourier-Transformation

Problem

- gegeben: Musikstück f in der Zeitdömane der Länge N Sekunden.
- gesucht: Akkord, der während der Bridge gespielt wird $t \in [0, N]$.

Strategie:

- Nutze die Fourier-Transformation und analysiere die auftretenden Frequenzen.

Short Time Fourier-Transformation: Probleme der Fourier-Transformation

Problem

- gegeben: Musikstück f in der Zeitdömane der Länge N Sekunden.
- gesucht: Akkord, der während der Bridge gespielt wird $t \in [0, N]$.

Strategie:

- Nutze die Fourier-Transformation und analysiere die auftretenden Frequenzen.

$\Rightarrow$ Falsch, denn es werden **alle** in $[0, N]$ auftretenden Frequenzen in die Frequenzdomäne überführt. Ergo kann man den Akkord nicht mehr wiederfinden! Das Spektrum hat durch die Fourier-Transformation seine Zeitinformation versteckt.

Short Time Fourier-Transformation: Grundidee

- Die einzige Zeitinformation, die uns bleibt, ist, dass das Spektrum *nur* die Frequenzen aus $[0, N]$ enthält.

Short Time Fourier-Transformation: Grundidee

- Die einzige Zeitinformation, die uns bleibt, ist, dass das Spektrum *nur* die Frequenzen aus $[0, N]$ enthält.

Idee

Führe eine Fourier-Transformation nur für ein beschränktes Zeitintervall aus. Somit beschränkt sich das Spektrum nur auf einen kleinen Zeitbereich $\Rightarrow$ genauere Zeitinformation.

Short Time Fourier-Transformation: Definition

Definition

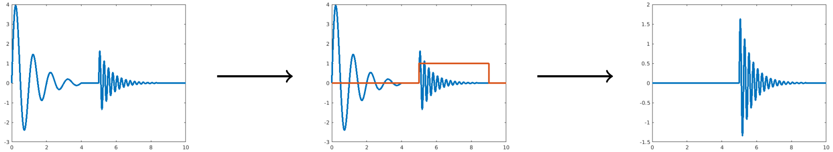
Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ gegeben, dann ist die **Short Time Fourier-Transformation** $\tilde{f}$ von f gegeben durch:

$$\tilde{f}_g(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(u)\overline{g}(u-t)\exp(-2\pi i\omega u)\mathrm{d}u,$$

wobei g die *Fensterfunktion*, t der Referenzzeitpunkt und ω die Frequenz ist.

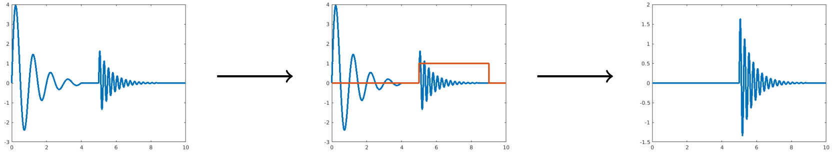
Short Time Fourier-Transformation: Eigenschaften

- Die Fensterfunktion g bestimmt, welcher Ausschnitt des Signals vom Referenzpunkt t aus analysiert wird.



Short Time Fourier-Transformation: Eigenschaften

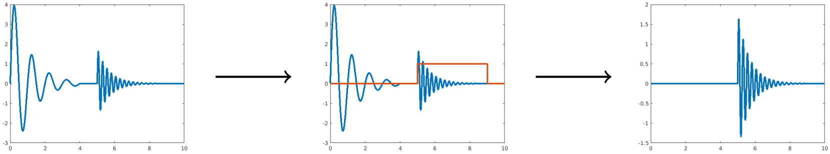
- Die Fensterfunktion g bestimmt, welcher Ausschnitt des Signals vom Referenzpunkt t aus analysiert wird.



- Neben der *Rechteckfunktion* können auch andere Funktionen als *Fensterfunktion* verwendet werden.

Short Time Fourier-Transformation: Eigenschaften

- Die Fensterfunktion g bestimmt, welcher Ausschnitt des Signals vom Referenzpunkt t aus analysiert wird.



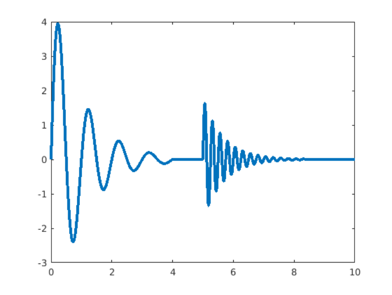
- Neben der *Rechteckfunktion* können auch andere Funktionen als *Fensterfunktion* verwendet werden.
- Die **STFT** erlaubt somit eine Darstellung des Spektrums in Abhängigkeit eines Zeitintervalls $\Rightarrow$ Spektrogramme.

Berechnung

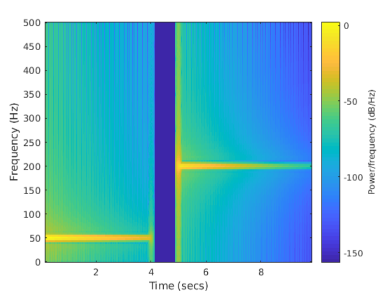
Die Berechnung der farblichen Kodierung/z-Achse ist gegeben durch:

$$\text{Spec}(t, \omega) = |\tilde{f}_g(t, \omega)|^2$$

Beispiel



$\longrightarrow$



Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

Goyal, Vivek K. et al.
"Foundations of Signal Processing",
2014 unter: http://fourierandwavelets.org/ (Stand: 16. Oktober 2017)

Jeschke, Harald O.
"Fourierreihe und Fouriertransformation",
Okayama unter: http://www.physics.okayama-u.ac.jp/jeschke_homepage/E4/kapitel1_2up.pdf
Stand (16.Oktober 2017)

Krieg, Aloys/Walcher, Sebastian
"Analysis für Informatiker. Skript zur Vorlesung",
Aachen 2016.

Müller, Meinard
"Fundamentals of Music Processing. Audio, Analysis, Algorithms, Applications",
2015.

Literaturverzeichnis

Scholz, Jan
"Diskrete FOURIER-Transformation" in: "FOURIER-Transformation und Saitenschwingung",
Gießen 2003 unter:
https://www.staff.uni-giessen.de/~gd1186/F-Prak/node8.html (Stand: 16 Oktober 2017)

Thomas, Sebastian
"Lineare Algebra für Informatiker. Manuskript",
Version 2.4.1, Aachen 1. August 2017

Westermann, Thomas
"Mathematik für Ingenieure. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch",
7. Auflage 2015 unter: http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mathe/downloads/kap18ext1059.pdf (Stand: 16.Oktober 2017)

mathe-online.at Redaktion
"Fourierreihen",
unter: http://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html (Stand: 16.Oktober 2017)

Noch Fragen?