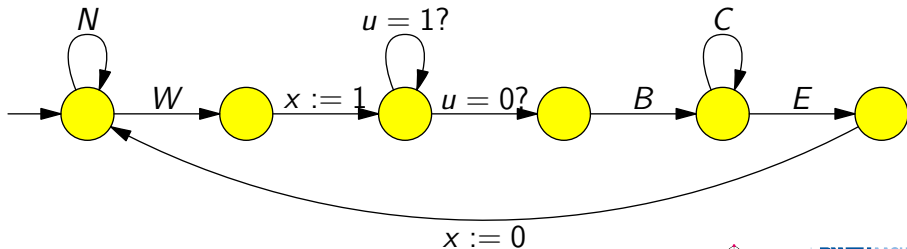


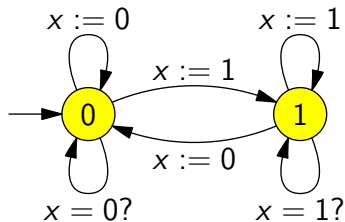
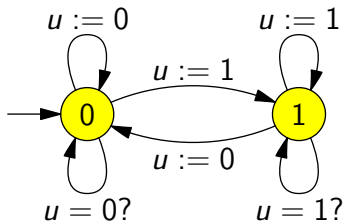
Modellierung des Prozesses P_1 :

```

while(true) {
  /* non critical */
  x:=1;
  while(u=1) { }
  /* critical section */
  x:=0;
}
  
```

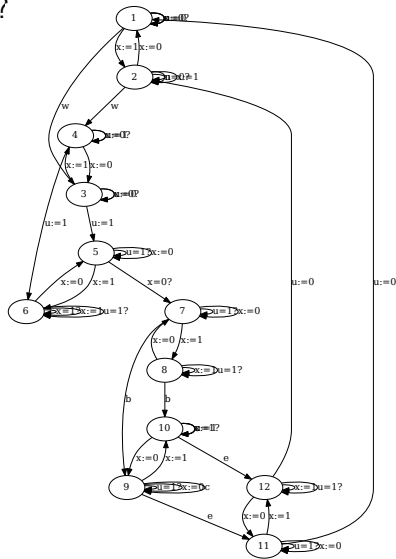
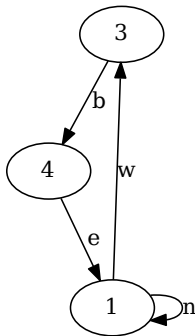


Modellierung der booleschen Variablen (B_u und B_x):



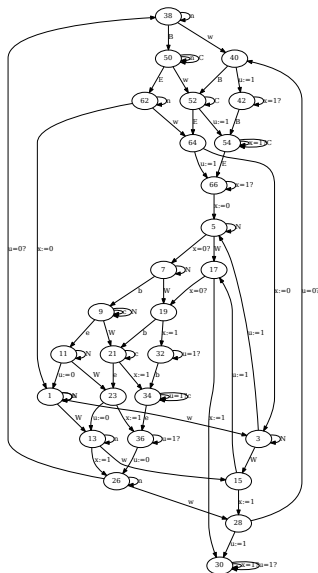
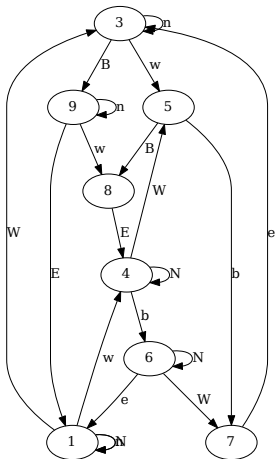
Was passiert, wenn nur P_0 läuft?

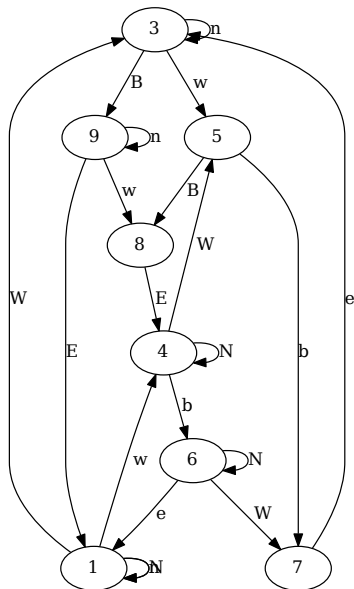
Betrachte $P_0 \circ B_u \circ B_x$.



Was passiert, wenn P_0 und P_1 laufen?

Betrachte $(P_0 \sqcup P_1) \circ B_u \circ B_x$.





h ist ein Homomorphismus, der alle Symbole außer W , B , E , N , w , b , e und n löscht.

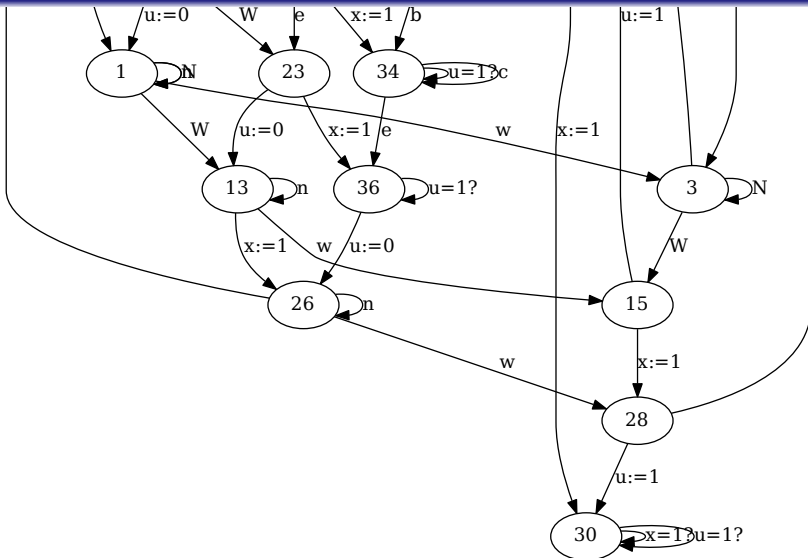
$L' = h(L(M))$ mit

$M = (P_0 \sqcup P_1) \circ B_u \circ B_x$.

$L' \cap \Sigma^* b(\Sigma \setminus \{e\})^* B \Sigma^* = \emptyset$

$L' \cap \Sigma^* B(\Sigma \setminus \{E\})^* b \Sigma^* = \emptyset$

Also kann sich nur ein Prozeß im kritischen Bereich befinden.



Problem: Deadlock!

Das Verfahren von Peterson

```
while(true) {  
  /* non critical */  
  u:=1;  
  s:=0;  
  while(x=1  $\wedge$  s=0) { }  
  /* critical section */  
  u:=0;  
}
```

```
while(true) {  
  /* non critical */  
  x:=1;  
  s:=1;  
  while(u=1  $\wedge$  s=1) { }  
  /* critical section */  
  x:=0;  
}
```

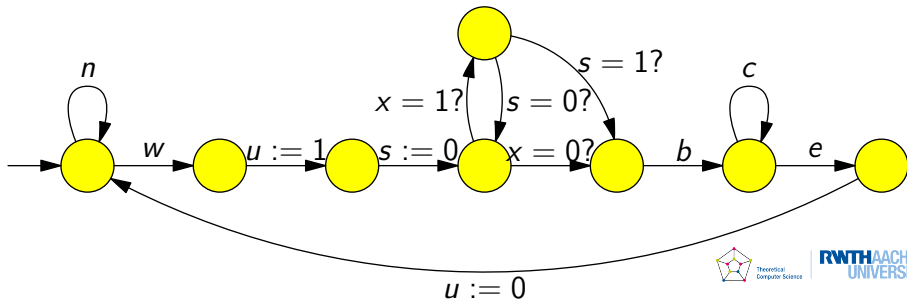
Nur ein Programm darf sich in der *critical section* befinden.

Modellierung des Prozesses P_0 :

```

while(true) {
  /* non critical */
  u:=1;
  s:=0;
  while(x=1  $\wedge$  s=0) { }
  /* critical section */
  u:=0;
}

```

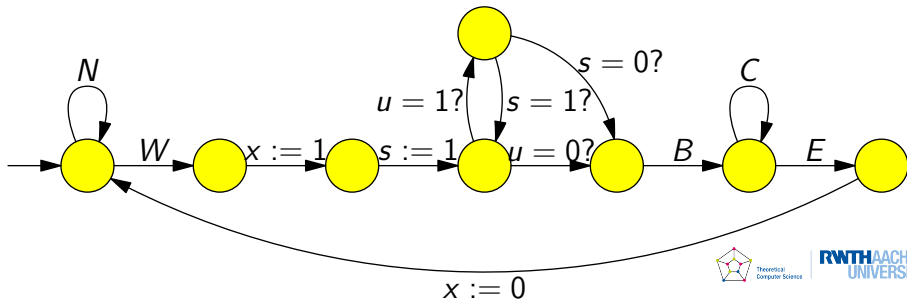


Modellierung des Prozesses P_1 :

```

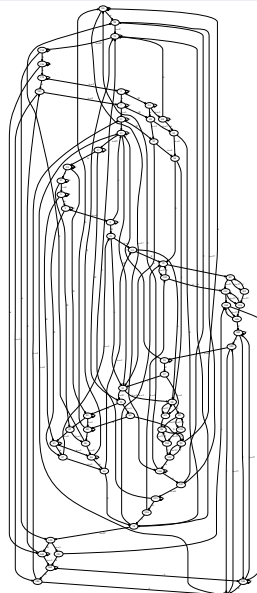
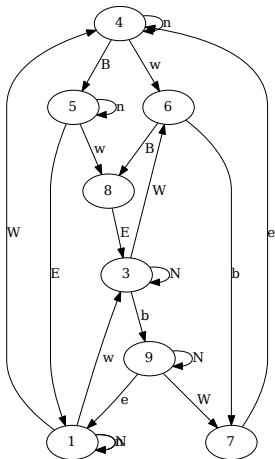
while(true) {
  /* non critical */
  x:=1;
  s:=1;
  while(u=1  $\wedge$  s=1) { }
  /* critical section */
  x:=0;
}

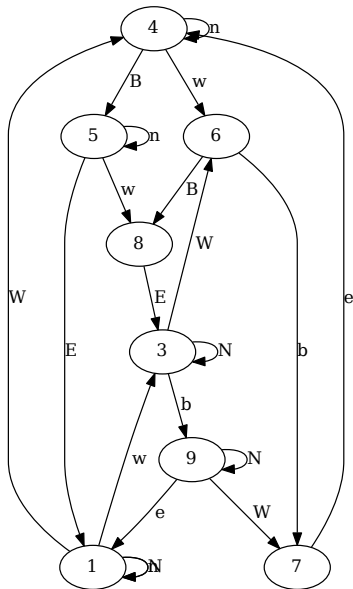
```



Was passiert, wenn P_0 und P_1 laufen?

Betrachte $(P_0 \sqcup P_1) \circ B_u \circ B_x \circ B_s$.





h ist wieder ein Homomorphismus, der alle Symbole außer W , B , E , N , w , b , e und n löscht.

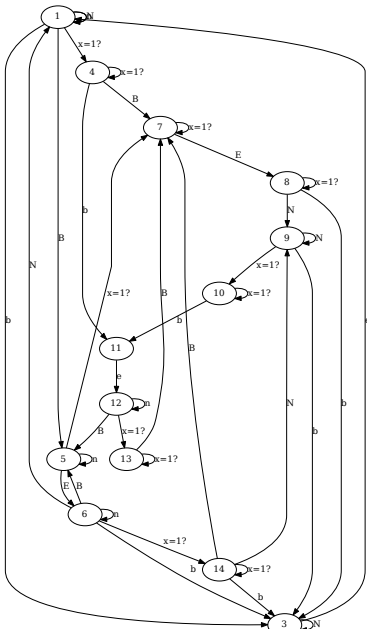
$L' = h(L(M))$ mit

$M = (P_0 \sqcup P_1) \circ B_u \circ B_x \circ B_s.$

$L' \cap \Sigma^* b(\Sigma \setminus \{e\})^* B \Sigma^* = \emptyset$

$L' \cap \Sigma^* B(\Sigma \setminus \{E\})^* b \Sigma^* = \emptyset$

Also kann sich wieder nur ein Prozeß im kritischen Bereich befinden.



h löscht jetzt alle Symbole außer B , E , N , b , e , n und $x = 1?$.

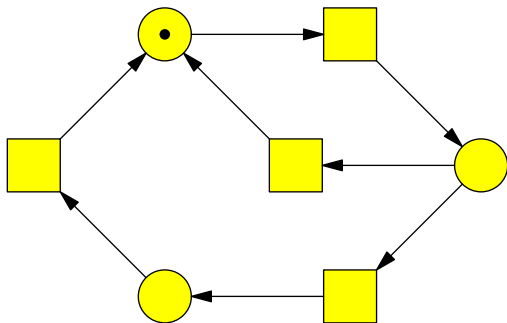
Wir stellen die Frage:

Kann in einem Lauf beliebig oft $x = 1?$ gefolgt von B vorkommen, ohne daß b vorkommt?

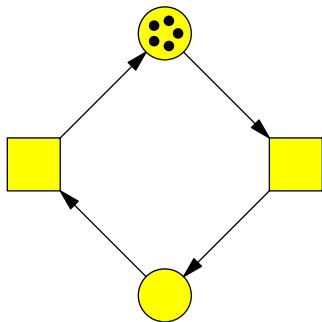
Gibt es einen Kreis, der $x = 1?$ und B enthält, aber nicht b ?

P_0 kann nicht verhungern.

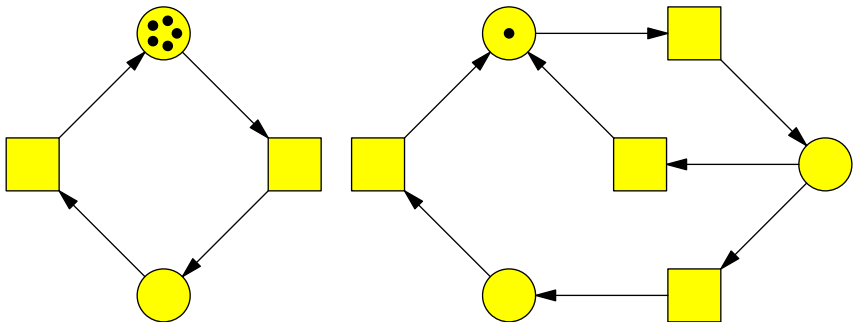
Petrietze



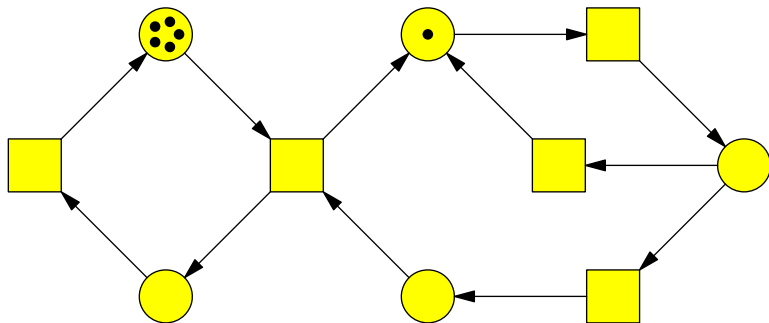
Petrietze



Petrietze



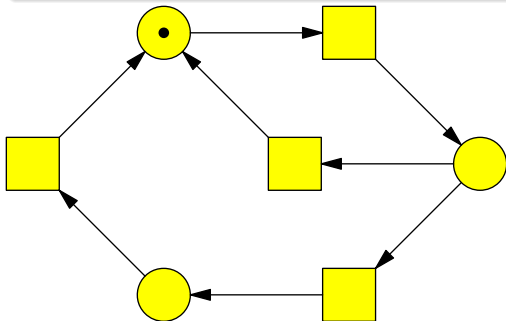
Petrietze



Definition

Ein *Petrietz* ist ein gerichteter, bipartiter Graph $N = (P, T, F)$ mit:

- 1 P , der Menge der Stellen,
- 2 T , der Menge der Transitionen,
- 3 $F \subseteq P \times T \cup T \times P$.



Markierungen

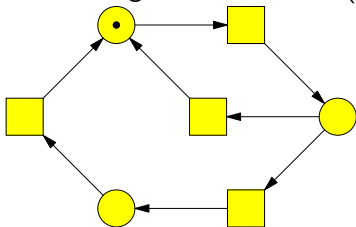
Definition

Es sei $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz.

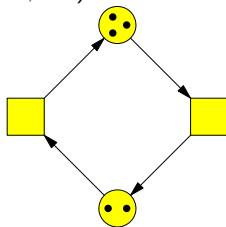
Eine *Markierung* ist eine Funktion $m: P \rightarrow \mathbf{N}_0$.

Sie ordnet jeder Stelle eine natürliche Zahl zu.

Falls wir die Stellen durch p_1, \dots, p_n ordnen, können wir eine Markierung kurz als Vektor (m_1, \dots, m_n) schreiben.



$(1, 0, 0)$



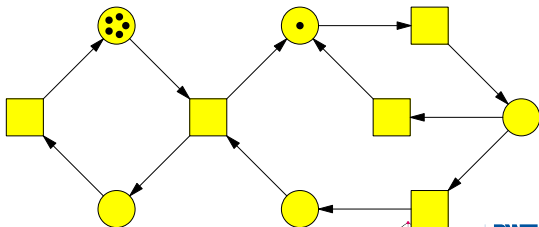
$(3, 2)$

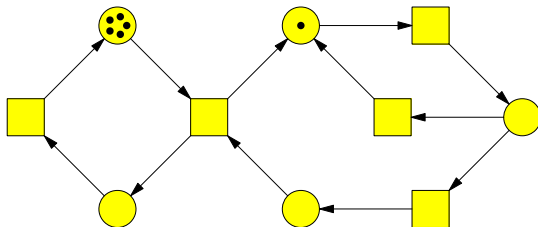
Definition

Es sei $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz, $p \in P$, $t \in T$.

- ① $\bullet t = \{p' \in P \mid (p', t) \in F\}$ (Vorbereich von t)
- ② $t^\bullet = \{p' \in P \mid (t, p') \in F\}$ (Nachbereich von t)
- ③ $\bullet p = \{t' \in T \mid (t', p) \in F\}$ (Vorbereich von p)
- ④ $p^\bullet = \{t' \in T \mid (p, t') \in F\}$ (Nachbereich von p)

Erweiterung: $R \subseteq P$, dann $R^\bullet = \bigcup_{r \in R} r^\bullet$.





- t bezüglich m aktiviert, falls $m(p) > 0$ für alle $p \in \bullet t$.
- t_1 und t_2 *in Konflikt* bezüglich m , falls beide aktiviert, aber nur eine schalten kann.
- t_1 und t_2 *nebenläufig*, falls $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 = \emptyset$.
- $m > (0, \dots, 0)$ ist eine *Verklemmung*, falls keine Transition schalten kann.

Die Schaltrelation

Definition

Es seien $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz, $t \in T$ und m, m' Markierungen.

Es gilt $m \xrightarrow{t} m'$ gdw.

① $m(p) > 0$ für alle $p \in {}^\bullet t$

②
$$m'(p) = \begin{cases} m(p) - 1 & \text{falls } p \in {}^\bullet t \setminus t^\bullet, \\ m(p) + 1 & \text{falls } p \in t^\bullet \setminus {}^\bullet t, \\ m(p) & \text{sonst} \end{cases}$$

Frage: Ist die erste Bedingung redundant?

m' ist von m erreichbar, falls

- $m = m'$ oder
- $m \xrightarrow{t} m''$ für ein $t \in T$ und m' ist von m'' erreichbar.

Petrietze und synchronisierte Produkte

Offensichtlich: Ein Petrietz kann einen NFA simulieren.

Gegeben seien NFAs M_1, M_2, \dots, M_k .

Dann ist $M = M_1 \circ \dots \circ M_k$ wieder ein NFA.

Können wir ein Petrietz für M konstruieren?

Können wir etwas besseres machen?

Petrietz, dessen Größe die Summe der Größen von M_i ist!

Analyse von Petrinetzen

Erreichbarkeitsbaum:

Gegeben ein Petrinetz und eine Markierung m .

Konstruiere einen Baum (Idee):

- 1 Die Wurzel besteht aus m .
- 2 Die Kinder eines Knotens sind die möglichen Folgemarkierungen.
- 3 (Kinder eines doppelt vorkommenden Knotens weglassen.)

Erreichbarkeit von Markierungen kann so oft leicht nachgewiesen werden.

Beschränktheit kann ebenfalls so nachgewiesen werden.

Es sei $N = (P, T, F)$ ein Petrietz mit $P = (p_1, \dots, p_n)$ und $T = (t_1, \dots, t_m)$.

Definiere die $m \times n$ -Matrizen D^- , D^+ und D :

$$D_{i,j}^- = \begin{cases} -1 & \text{falls } p_j \in \bullet t_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$D_{i,j}^+ = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_j \in t_i \bullet \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D = D^- + D^+$$

Theorem

Es sei $N = (P, T, F)$ ein Petrietz und $m, m' \in \mathbf{N}^n$ Markierungen.

Falls m' von m erreichbar ist, dann gibt es ein $x \in \mathbf{N}^m$ mit

$$m' = m + xD.$$

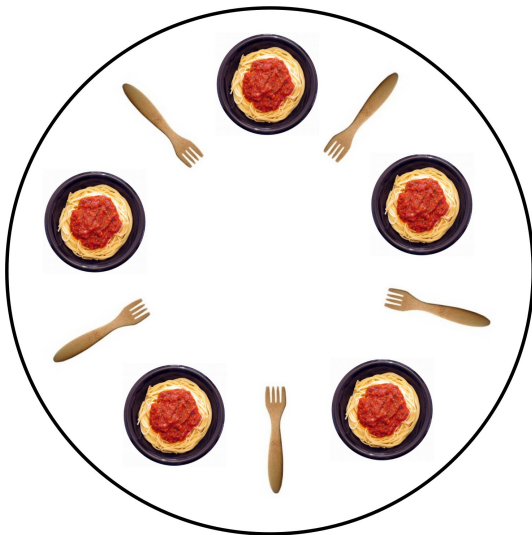
Beweis.

$m' = m + (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)D$ falls eine Transition einmal schaltet.

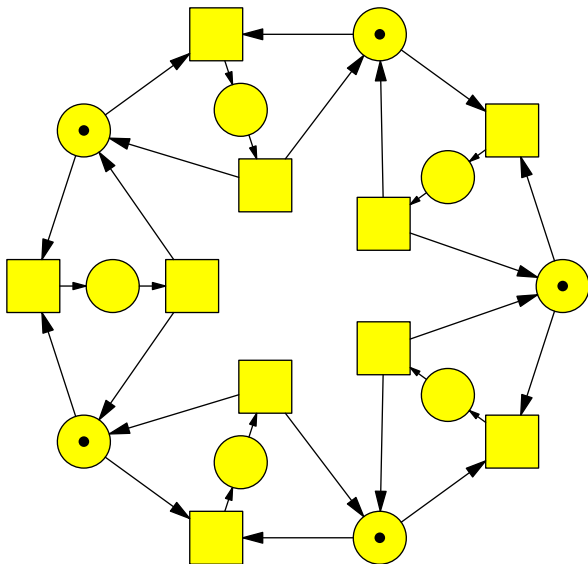
x ergibt sich als Summe solcher Vektoren einer Schaltfolge. □

Auf diese Weise kann oft gezeigt werden, daß eine Markierung nicht erreichbar ist.

Beispiel



Die essenden und denkenden Philosophen.



Denkende und essende Philosophen.