RWTH Aachen | **SS 2017**
Lehrgebiet Theoretische Informatik | Blatt 13
Rossmanith–Dreier–Hark–Kuinke | 24.7.2017

Lösungsvorschlag zur Vorlesung Formale Sprachen, Automaten und Prozesse

Wir empfehlen die Übungsklausuren in Lerngruppen gegenseitig zu korrigieren.

Aufgabe 1

a)

Die Sprache L_1 ist nicht kontextfrei, wie man mit dem Pumping-Lemma zeigen kann. Hier eignet sich das Wort $0^n1^n0^n1^n$. Hier gilt für jede gültige Zerteilung in $uvwxy$, daß uwy (das heißt wir setzen uv^0wx^0y) nicht mehr in L_1 liegt:

1. Fall: vwx liegt komplett in der ersten oder zweiten hälfte. Durch pumpen ändert sich nur die erste oder zweite Hälfte. Falls v nur 0en und x nur $1en$ enthält, hat das neue Wort die Form $0^{n-a}1^{n-b}0^n1^n$ wobei $v = 0^a, x = 1^b$. Dieses Wort kann offensichtlich nicht in L_1 liegen.

Falls entweder v oder x sowohl 0en als auch 1en enthält (aber nicht beide), ergibt sich folgendes: $0^a1^e0^n1^n$ mit $a + b = n$ und $c + d + e = n$ für $u = 0^a$, $v = 0^b1^c$ und $x = 1^d$. Dieses Wort lässt sich ebenfalls nicht einteilen in ww. Die anderen Aufteilungen folgen analog.

2. Fall: vwx liegt im übergang der beiden Hälften. Demnach beinhaltet es insbesondere nichts von den ersten 0^n und nichts von den letzten 1^n. Also kann nach dem pumpen das Wort nicht in L_1 sein, da es die Form $0^n1^a0^b1^n$ hat, mit $a, b \neq n$.

b)

Die Sprache L_2 ist regulär, weil man $|w| = 1$ wählen kann und dann nur überprüfen muß, ob das erste und letzte Zeichen der Eingabe gleich sind. Dies geht offensichtlich mit einem NFA mit vier Zuständen. Sie ist folglich auch kontextfrei.

c)

Die Sprache L_3 ist kontextfrei, wie die folgende Grammatik zeigt: $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$.

Sie ist aber nicht regulär, wie eine Anwendung des Pumping-Lemmas auf dem Wort $w = 0^n110^n$ zeigt.

Für jede Zerlegung $w = xyz$, muss xy ein prefix von 0^n sein, da $|xy| \leq n$. Da $|y| > 0$, gilt $x = 0^a$ $y = 0^b$ mit $a + b = n$ und $b = 0$. Also gilt $xy^iz = 0^a0^{ib}110^n$. Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der 0en am anfang und ende nicht gleich ist (z.b. $i = 2n$).

d)

Die Sprache L_4 ist endlich (da vorne höchstens hundert Nullen stehen), somit also regulär und von daher auch kontextfrei.

Aufgabe 2
Wir wählen G: $S \to bSb \mid abSba \mid \varepsilon$.

Korrektheit
Zeige, jede aus S erzeugbare Satzform außer ε hat die Form $wb(S+\varepsilon)bw$, wobei w ein Wort aus Σ^* ist, die nicht das Teilwort aa enthält.

Induktion über i-viele Anwendungen der Pruduktionsregeln. Als Induktionsanfang wählen wir $i = 1$ und bekommen, die Wörter bSb und $abSba$ welche die Bedingung erfüllen. Als Induktionsvoraussetzung wählen wir also: Nach i-vielen Anwendungen der Pruduktionsregeln haben alle Satzformen die Form $wbSbw$ (der Fall $wbbw$ kann ignoriert werden, da es ein Terminalwort ist). Der Induktionsschritt geht nun von $i \to i+1$.

Nach i Anwendungen der Regeln erhalten wir $S \Rightarrow^{IV} wbSbw$, wobei w ein Wort aus Σ^* ist, die nicht das Teilwort aa enthält. Wir wenden eine weitere Regel an und Unterscheiden über drei Fälle welche Regel wir wählen.
1. Fall ($S \to bSb$):
$wbSbw \Rightarrow wbbSbbw = w'bSbw'$, w' kann nicht aa als Teilwort enthalten.
2. Fall ($S \to abSab$):
$wbSbw \Rightarrow wbabSbabw = w'bSbw'$, w' kann nicht aa als Teilwort enthalten.
3. Fall ($S \to \varepsilon$):
$wbSbw \Rightarrow wbbw$.

Also können nach beliebing vielen Anwendungen der Produktionsregeln nur Satzformen der Form $wb(S+\varepsilon)bw$ erzeugt werden, wobei w ein Wort aus Σ^* ist, die nicht das Teilwort aa enthält. Folglich kann keine Satzform erzeugt werden, die die Bedingungen der Sprache verletzt.

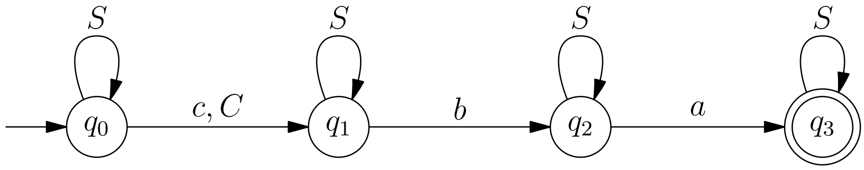
Vollständigkeit
Zeeige, jedes Wort aus der Sprache läßt sich auf S zurückführen. Beobachtung: Für jedes Palindrom gerader Länge $z = ww^R$, welches nicht aa enthält gilt: Falls sich wSw^R ableiten lässt, so auch z (da $S \to \varepsilon$ als Regel existiert).
Zeige mit Induktion über die Wortlänge, für jedes Palindrom gerader Länge $z = ww^R$, welches nicht aa enthält, lässt sich wSw^R ableiten. Wähle $|w| = i$.
IA: Es lässt sich leicht sehen, dass sich bSb und $abSba$ ableiten lassen.
IS: Sei $z = ww^R$ ein Palindrom gerader Länge, welches nicht aa enthält. Zeige wSw^R lässt sich von S ableiten. Sei $|w| = i$. w endet nicht auf a (sonst hätte ww^R als Teilwort aa), also endet es auf ab oder auf bb.
1. Fall w is von der Form $w = uab$
$uabSbau^R \Leftarrow uSu^R \Leftarrow^{IV} S$, da $|u| = i-2$.
2. Fall w is von der Form $w = ubb$
$ubbSbbu^R \Leftarrow ubSbu^R \Leftarrow^{IV} S$, da $|ub| = i-1$.
Also lässt sich jedes Palindrom gerader Länge, welches nicht aa enthält von S aus ableiten.

Aufgabe 3

Bei der Anwendung der Minimierungstechnik zeigt sich, daß die Zustände q_0, q_2 und q_3 äquivalent sind. Der minimierte DFA hat also nur zwei Zustände, die bei a gewechselt und bei b beibehalten werden. Die Klassen sind $[\varepsilon] = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade} \,\}$ und $[a] = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ ist ungerade} \,\}$.

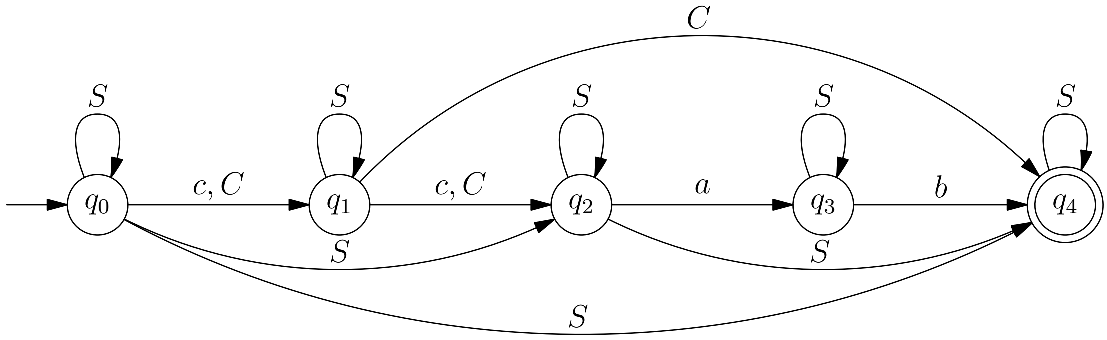
Aufgabe 4

a)



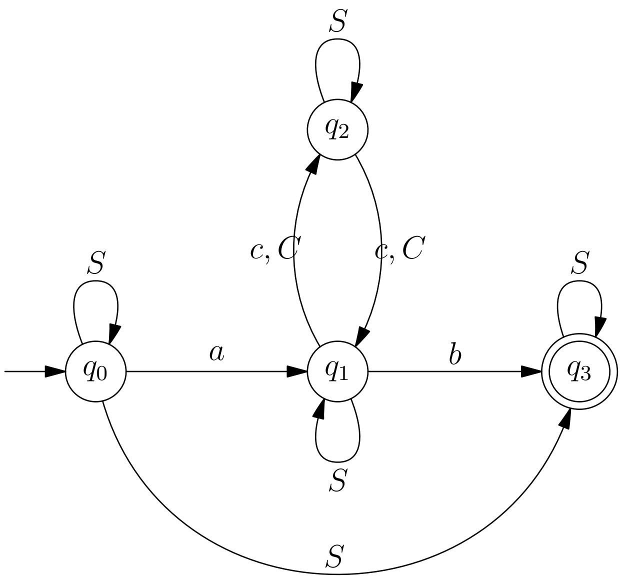
Es gilt $L_1 \cap L(G) = \emptyset$

b)



Es gilt $L_2 \cap L(G) \neq \emptyset$

c)



Es gilt $L_3 \cap L(G) \neq \emptyset$