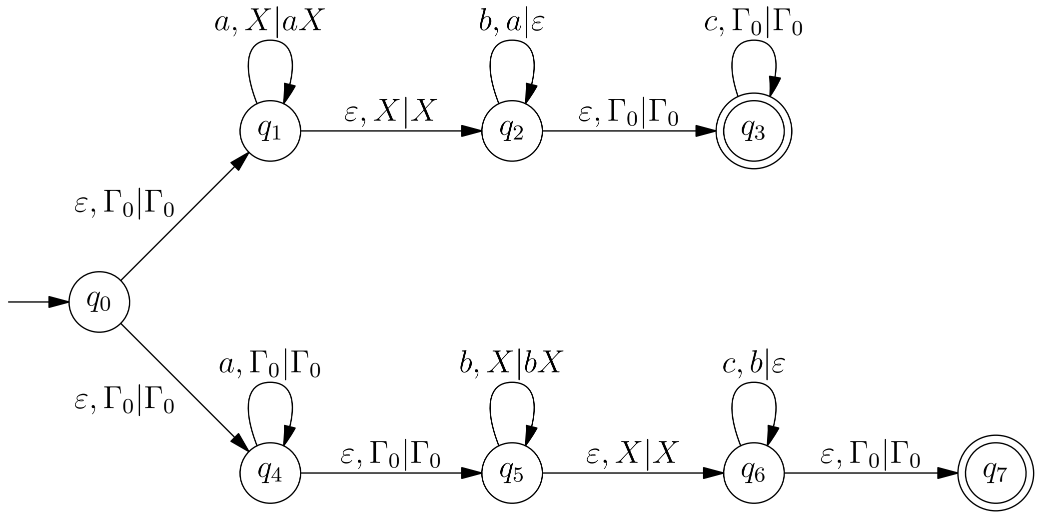
RWTH Aachen **SS 2017**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Blatt 9
Rossmanith–Dreier–Hark–Kuinke 3.7.2017

Lösungsvorschlag zur Vorlesung Formale Sprachen, Automaten und Prozesse

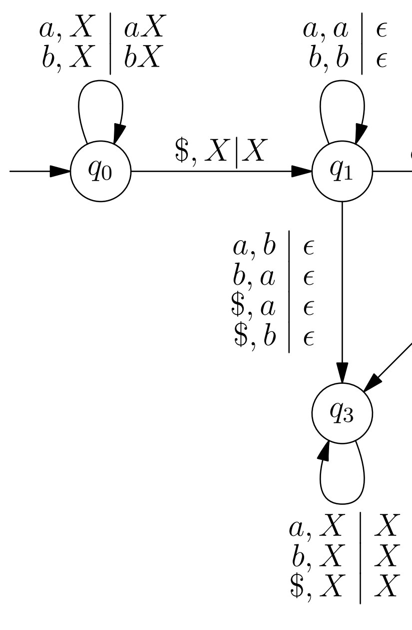
Aufgabe T26

Der Kellerautomat rät erst nichtdeterministisch, ob $i = j$ oder $j = k$ gilt. Danach wird der Stack zum Zählen der entsprechenden Symbole genutzt.

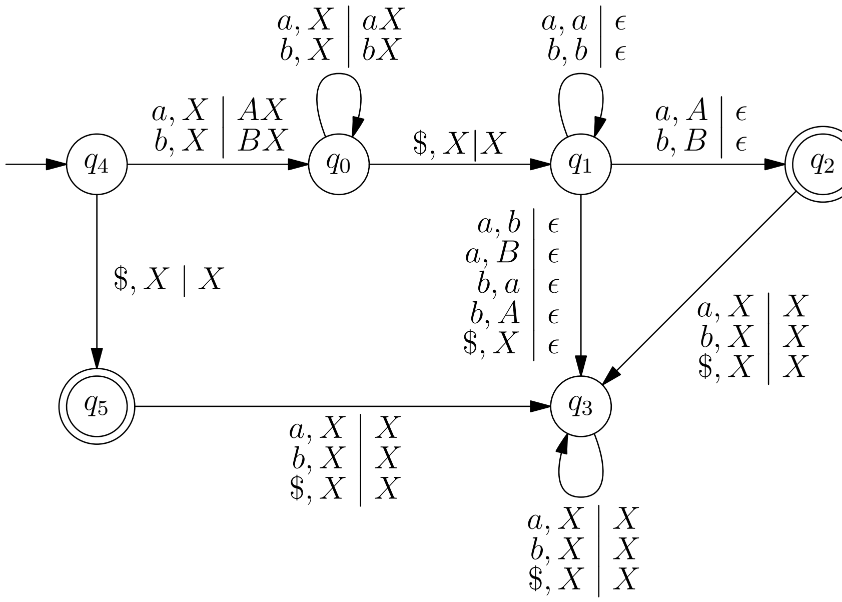


Aufgabe T27

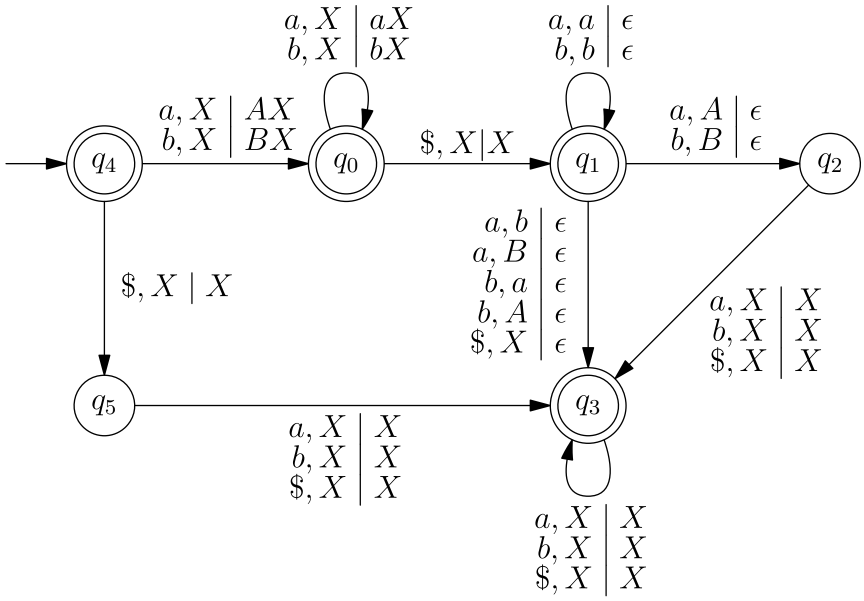
Zunächst erstellen wir einen Automaten für das Komplement, $\{\, w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$.



Der Kellerautomat ist zwar deterministisch, enthält aber eine ϵ-Transitionen. Einfaches Tauschen der akzeptierenden Zustände führt daher leider nicht zu einem korrekten Ergebnis. Wir entfernen daher erst die ϵ-Transition, indem wir das erste Symbol auf dem Stack anders notieren, als die kommenden Symbole (und das Wort \$ gesondert behandeln).



Dieser Automat ist deterministisch, enthält keine ϵ-Transitionen und blockiert auch nicht. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß alle Zustände außer q_1 vollständig sind und q_1 nur blockieren könnte, falls das Kellerbodensymbol auf dem Stack liegen würde. Dies ist aber in Zustand q_1 nicht möglich, da vorher auf jeden Fall ein A oder ein B auf den Stack geschrieben wurde. Einfaches Austauschen der akzeptierenden Zustände liefert somit einen Automat, der $\{\$, a, b\}^* \setminus \{\, w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$ akzeptiert.



Aufgabe H22 (10 Punkte)

Am Anfang entscheidet sich der Kellerautomat nichtdeterministisch für einen von drei Folgezuständen q_1, q_2, q_3, die sich bis auf Vertauschung von a, b, c zueinander symmetrisch verhalten.

Betrachten wir exemplarisch den Zustand q_1: Hier haben offenbar nur die Zeichen a und b einen Effekt. Wann immer ein a gelesen wird, wird entweder ein a auf den Keller gelegt oder ein b vom Keller entfernt. Duales gilt für b. Folglich entspricht die Differenz der Vorkommen von a und b auf dem Keller der Differenz der Vorkommen von a und b im bisherigen Wort. Andererseits sieht man, daß auf dem Keller niemals gleichzeitig die Zeichen a und b vorkommen können. Folglich ist der Keller genau dann leer, wenn das bisher gelesene Wort gleich viele a wie b enthält.

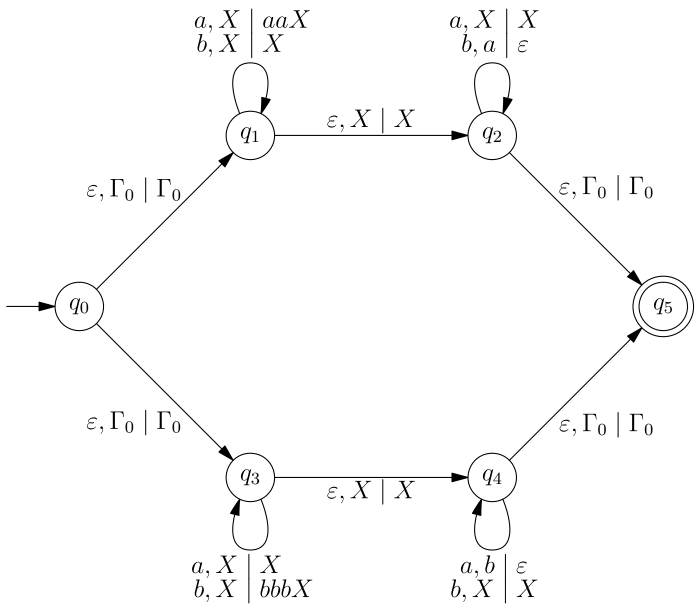
Weiterhin ist bei leerem Keller ein ε-Übergang in den akzeptierenden Zustand möglich. Für ein Wort w und ein Zeichen a bezeichne $|w|_a$ dabei die Anzahl von a in w. Der gegebene Kellerautomat erkennt also die Sprache aller Wörter w über $\{a, b, c\}$, die *mindestens eine* der folgenden Bedingungen erfüllen:

- $|w|_a = |w|_b$,
- $|w|_b = |w|_c$,
- $|w|_a = |w|_c$

Aufgabe H23 (10+5 Punkte)

a)

Anfangs entscheidet sich der Automat nichtdeterministisch für die Bedingung $2|u|_a = |v|_b$ oder $3|u|_b = |v|_a$. Im folgenden beschreiben wir, wie der Automat die erste Bedingung richtig erkennt Wir legen zuerst für jedes gelesene a zwei a auf den Keller und ignorieren jedes gelesenes b. Dann wechseln wir nichtdeterministisch in eine zweite Phase, in der wir für jedes gelesene b ein a vom Keller nehmen und gelesene a ignorieren. Wenn nur noch das Kellerbodensymbol auf dem Keller liegt, können wir in den Endzustand wechseln. Für die zweite Bedingung geht man analog vor.



b)
Behauptung: Für ein $w \in \{a, b\}^*$ gilt $w \in L$ gdw. $(q_0, w, \Gamma_0) \vdash^* (q_5, \varepsilon, \beta)$.
Sei $w \in L$. Dann kann das Wort zerlegt werden in $w = uv$ mit den oben beschriebenen Bedingungen. Im Falle der ersten Bedingung erhalten wir folgende Konfigurationsfolge

$$(q_0, w, \Gamma_0) \vdash^* (q_1, v, a^{2|u|_a}\Gamma_0) \vdash (q_2, v, a^{2|u|_a}\Gamma_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \Gamma_0) \vdash (q_5, \varepsilon, \Gamma_0),$$

d.h. der Automat akzeptiert w. Der Beweis für die zweite Bedingung erfolgt analog.
Angenommen der Automat akzeptiert w. Dann gibt es entweder eine Konfigurationsfolge der Form

$$(q_0, w, \Gamma_0) \vdash^* (q_1, v, a^{2m}\Gamma_0) \vdash (q_2, v, a^{2m}\Gamma_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \Gamma_0) \vdash (q_5, \varepsilon, \Gamma_0),$$

oder

$$(q_0, w, \Gamma_0) \vdash^* (q_3, v, b^{3m}\Gamma_0) \vdash (q_4, v, b^{3m}\Gamma_0) \vdash^* (q_4, \varepsilon, \Gamma_0) \vdash (q_5, \varepsilon, \Gamma_0),$$

für ein $m \in \mathbf{N}$. Dann kann w zerlegt werden in $w = uv$. Nach Konstruktion des Automaten muss entweder $|v|_b = 2m$ gelten oder $|v|_a = 3m$. Im ersten Fall folgt aus der Konstruktion des Automaten $|u|_a = m$, im zweiten $|u|_b = m$. In jedem Fall gilt $w \in L$.