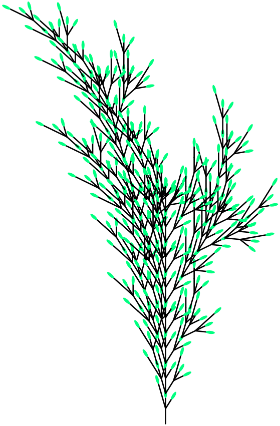
Formale Systeme, Automaten, Prozesse

Peter Rossmanith

Theoretische Informatik, RWTH Aachen

23. Mai 2017



RWTH AACHEN UNIVERSITY

Termine

Vorlesung

- Montags, 10:15 - 11:45 Uhr, Grüner Hörsaal
- Dienstags, 10:15 - 11:00 Uhr, Grüner Hörsaal

Fragestunde

- Dienstags, 11:00 - 11:45, Grüner Hörsaal

Tutorübungen

- Mittwochs, 16:15 - 17:45 Uhr
- Donnerstags, 8:30 - 10:00 Uhr
- Donnerstags, 18:15 - 19:45 Uhr

Globalübung

- Freitags, 16:15 - 17:45 Uhr

Homepage: `http://tcs.rwth-aachen.de/lehre/FSAP/SS2017`

Anmeldungen über
`https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/fosap17`

RWTHAACHEN UNIVERSITY

Tutorübungen

Ablauf einer Doppelstunde

- Ausgabe der Übungsblätter
- Abgabe der Hausaufgaben
- Gemeinsames Bearbeiten der Tutoraufgaben
- Miniprüfung (15 Minuten)
- Rückgabe der korrigierten Hausaufgaben

Anmeldungen über
`https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/fosap17`.

Weitere Angebote

Peter Rossmanith
Sprechstunde: Mittwochs, 10:15 - 11:00 Uhr, Raum 4104b

Jan Dreier, Phillip Kuinke (Raum 4105b)
Sprechzeiten: Mittwochs, 10:00 - 11:00 Uhr

Marcel Hark (Raum 4208)
Sprechzeiten: Dienstags, 14:00 - 15:00 Uhr

Fragestunde
Dienstags 11:00 - 11:45, Grüner Hörsaal (nach der Vorlesung)

Globalübung
Freitags 16:15 - 17:45, H02 (Beginn 5.5.)

Email: `tcs-teaching@cs.rwth-aachen.de`

Prüfungen

1. Klausur
24. August, 14:00 - 16:30

2. Klausur
18. September, 17:00 - 19:30

Teilnahmevoraussetzungen (BSc. Informatik)

- Regelmäßige Teilnahme an Tutorübungen und Hausaufgaben
- 50% der Punkte bei den Hausaufgaben
- 50% der Punkte bei den Miniprüfungen

Einleitendes Beispiel

Betrachte folgendes Problem:

Eingabe: Ein String w aus 0en und 1en

Frage: Sind diese beiden Eigenschaften erfüllt?

- Es kommt 11 nicht als Unterwort in w vor.
- Als Binärzahl ist w durch drei teilbar.

Beispiele: 0101, 1001, 00110, 0101010

Gesucht:

Ein Programm, das w bekommt und 0 oder 1 zurückgibt.

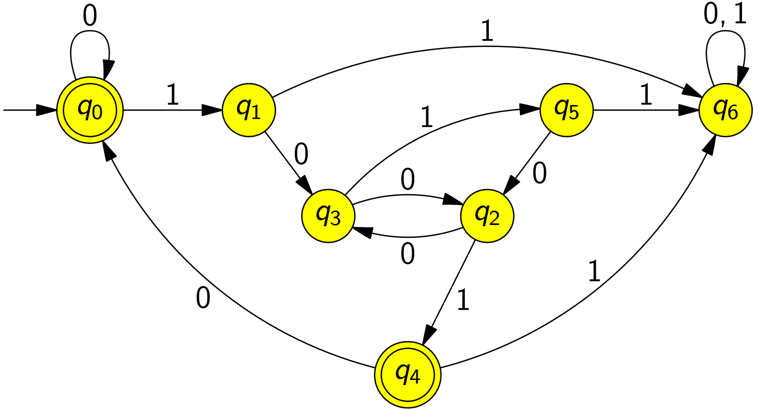
Eine mögliche Lösung:

```
int F[] = { 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0};
int delta[][2] =
{{ 0, 1}, { 3, 6}, { 3, 4}, { 2, 5}, { 0, 6}, { 2, 6}, { 6, 6}};

int drei_not_11(char * w)
{
  int q = 0;
  while(*w) q = delta[q][*w++ - '0'];
  return F[q];
}
```

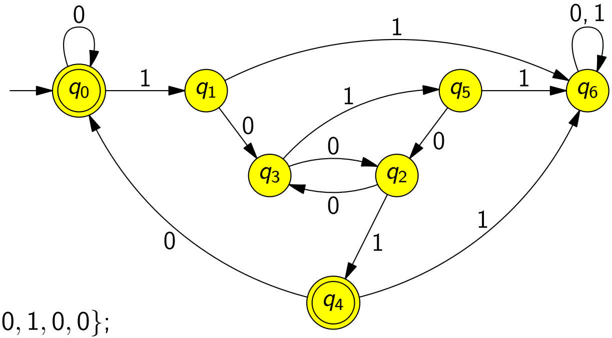
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Das Programm simuliert...



einen sogenannten endlichen Automaten.

Vergleiche:




```
int F[] = { 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0};
int delta[][2] = {{ 0, 1}, { 3, 6}, { 3, 4}, { 2, 5}, { 0, 6}, { 2, 6}, { 6, 6}};

int drei_not_11(char * w)
{
  int q = 0;
  while(*w) q = delta[q][*w++ - '0'];
  return F[q];
}
```

Wie effizient ist dieses Programm?

```
drei_not_11:
  pushl %ebp
  xorl %ecx, %ecx
  movl %esp, %ebp
  movl 8(%ebp), %edx
  movzbl (%edx), %eax
  testb %al, %al
  je .L3
.L6:
  movsbl %al,%eax
  addl $1, %edx
  leal -48(%eax,%ecx,2), %eax
  movl delta(,%eax,4), %ecx
  movzbl (%edx), %eax
  testb %al, %al
  jne .L6
.L3:
  movl F(,%ecx,4), %eax
  popl %ebp
  ret
```

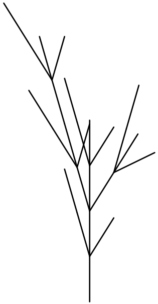
Etwas besser zu verstehender MIPS-Code (RISC-Prozessor):

```
drei_not_11:
  lb $2,0($4)
  beq $2,$0,.L2
  move $3,$0
  lui $5,%hi(delta)
  addiu $5,$5,%lo(delta)
.L3: sll $3,$3,1
  addu $3,$3,$2
  addiu $4,$4,1
  addiu $3,$3,-48
  lb $2,0($4)
  sll $3,$3,2
  addu $3,$5,$3
  bne $2,$0,.L3
  lw $3,0($3)
.L2: lui $4,%hi(F)
  addiu $4,$4,%lo(F)
  sll $3,$3,2
  addu $3,$3,$4
  j $31
  lw $2,0($3)
```

Zeichnen von Pflanzen

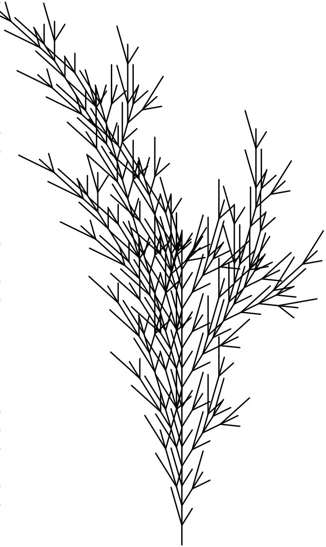
Zeichenprogramm, das diese Befehle kennt:

- F: Zeichne eine kurze Linie.
- -: Drehe dich ein wenig nach rechts.
- $+$: Drehe dich ein wenig nach links.
- [: Merke dir die augenblickliche Position und Richtung.
-]: Kehre zur letzten gemerkten Position und Richtung zurück.

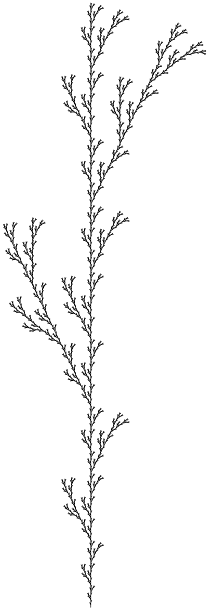


```
F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF]
[--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F
```

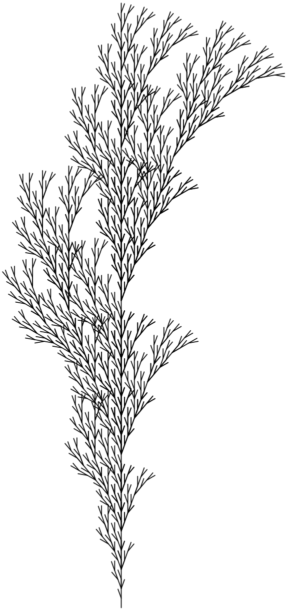
```
F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF
][--F]F[+F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--
F]F]F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[
+FF][--F]F]F[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][
--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]
FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]F[+F[
+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][
--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F
F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF
][--F]F][--F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][
--F]F]F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][-
-F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][-
-F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]
FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F[+F[+F
F][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F][--F[+FF][
--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F
]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+F
F][--F]F][--F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF]
[--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F]
[--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF]
[--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F[+F[+FF][
--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[
+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F]F[+FF
][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F
]F[+F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F]F
[+FF][--F]FF[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F][--F[+FF][
--F]F]F[+FF][--F]F][--F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+FF][--F]F
][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F[+F[+FF][--F]FF[+F
F][--F]F][--F[+FF][--F]F]F[+FF][--F]F
```



Starte mit F und wende $F \mapsto F[+FF][--F]F$ an!



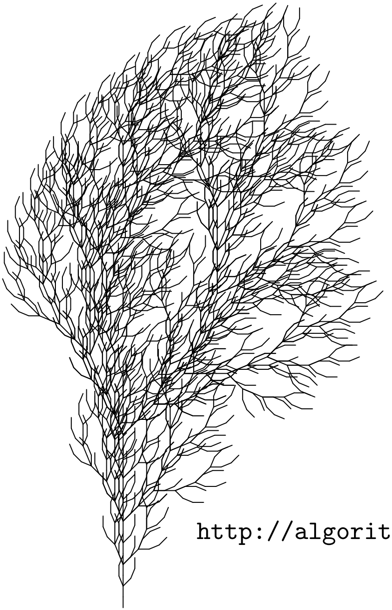
$$n = 5$$
$$\delta = 25.7$$
$$F \mapsto F[+F]F[-F]F$$



$n = 5$

$\delta = 20$

$F \mapsto F[+F]F[-F][F]$



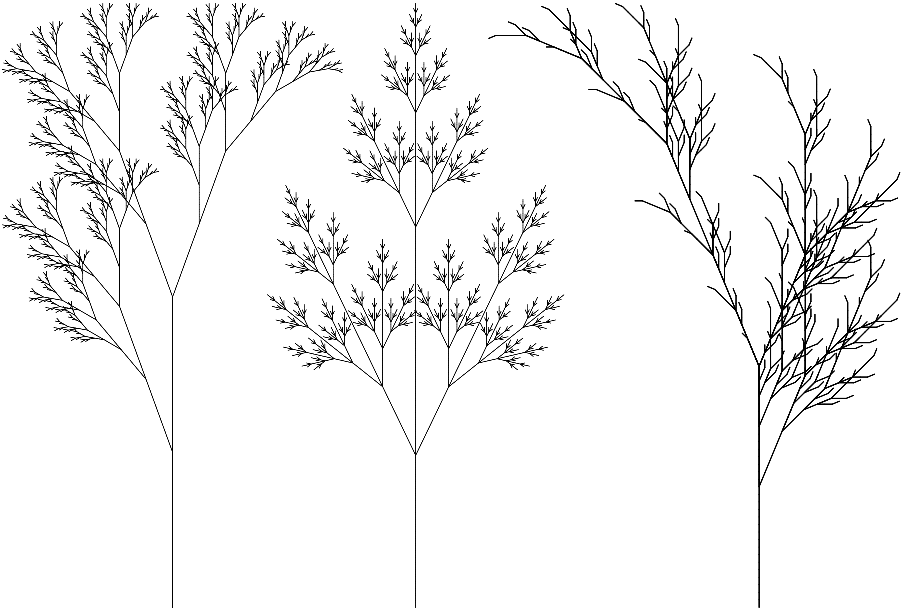
$n = 4$
$\delta = 22.5$
$F \mapsto$
$FF-[-F+F+F]+[+F-F-F]$

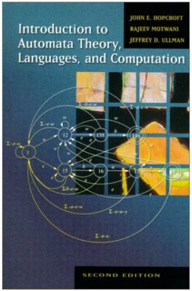
Buch:

P. Prusinkiewicz
A. Lindenmayer

The Algorithmic Beauty of Plants

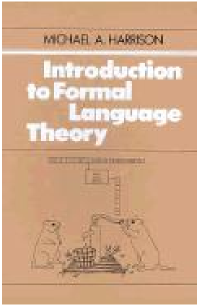
http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf





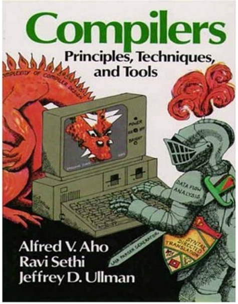
Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition)

by John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman



Introduction to Formal Language Theory

by Michael A. Harrison



Compilers: Principles, Techniques, and Tools

by Alfred V. Aho, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman

Wörter und Sprachen

Was ist ein Wort, was ist eine Sprache?

Informelle Antwort:

1. Ein Wort ist eine Aneinanderkettung von Symbolen aus einem Alphabet.
2. Eine Sprache ist eine Menge von Wörtern.

Beispiele:

01, 101001, ϵ sind Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$

$\{0, 1, 101, 1001\}$ und $\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$ sind Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

Wie sieht eine formale, mathematisch korrekte Formalisierung dieser Begriffe aus?

Definition

1. Eine *Halbgruppe* $(H, \circ)$ besteht aus einer Menge H und einer assoziativen Verknüpfung $\circ : H \times H \to H$.
2. Ein *Monoid* ist eine Halbgruppe mit einem neutralen Element.
3. Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und $E \subseteq M$.
   E ist ein *Erzeugendensystem* von $(M, \circ)$, falls jedes $m \in M$ als $m = e_1 \circ \cdots \circ e_n$ mit $e_i \in E$ dargestellt werden kann.

Ein neutrales Element e ist links- und rechtsneutral. Für jedes x gilt $e \circ x = x \circ e = x$.

Frage: Ist das neutrale Element in einem Monoid eindeutig?

Ja, denn $e_1 \circ e_2 = e_1$ und $e_1 \circ e_2 = e_2$.

Beispiele

- $(\mathbf{Z}, +)$ ist ein Monoid.
  $\{-1, 1\}$ ein Erzeugendensystem.
- $(\mathbf{N_0}, +)$ ist ein Monoid.
  $\{1\}$ ein Erzeugendensystem.
- $(\mathbf{Z}_8, \cdot)$ ist ein Monoid.
  $\{2, 3, 5\}$ ein Erzeugendensystem.

Frage:

Ist $\{-16, 17, 18\}$ ein Erzeugendensystem für $(\mathbf{Z}, +)$?

Ist $\{3, 5, 7\}$ ein Erzeugendensystem für $(\mathbf{Z_8}, \cdot)$?

Freie Erzeugendensysteme

Definition

Ein Erzeugendensystem E für ein Monoid $(M, \circ)$ ist *frei*, falls jedes $m \in M$ auf nur eine Art als $m = e_1 \circ \cdots \circ e_n$ mit $e_i \in E$ dargestellt werden kann.
Falls E ein freies Erzeugendensystem für $(M, \circ)$ ist, dann sagen wir, daß $(M, \circ)$ das von *E frei erzeugte Monoid ist.*

Frage:

Ist *das* korrekt?

Beispiele

$(\mathbf{Z}, +)$ ist von $\{-1, 1\}$ nicht frei erzeugt:

- $2 = 1 + 1 = 1 + 1 + (-1) + 1$
- $0 = (-1) + 1 = 1 + (-1)$

$(\mathbf{N}_0, +)$ ist von $\{1\}$ frei erzeugt.

Frage: Wie kann das neutrale Element erzeugt werden?

Frage: $(\mathbf{N}_0, +)$ von $\{1\}$ frei erzeugt. Wie wird 0 erzeugt?

Isomorphismen zwischen Monoiden

Definition

Zwei Monoide $(M_1, \bullet)$ und $(M_2, \circ)$ sind isomorph, falls es eine Abbildung $h\colon M_1 \to M_2$ gibt mit

1. h ist bijektiv.
2. h ist ein Homomorphismus, d.h. $h(u \bullet v) = h(u) \circ h(v)$ für alle $u, v \in M_1$.

Wir nennen h einen *Isomorphismus*.

Theorem

Es sei Σ ein Alphabet. Dann ist das von Σ frei erzeugte Monoid bis auf Isomorphismus eindeutig.

Beweis.

$(M_1, \bullet)$, $(M_2, \circ)$ von Σ frei erzeugte Monoide.

$$h\colon M_1 \to M_2,\ u = u_1 \bullet \cdots \bullet u_n \mapsto u_1 \circ \cdots \circ u_n$$
$$g\colon M_2 \to M_1,\ v = v_1 \circ \cdots \circ v_m \mapsto v_1 \bullet \cdots \bullet v_m$$

mit $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma$.
$h(g(w)) = w$, also h bijektiv.

$$h(u \bullet v) = h(u_1 \bullet \cdots \bullet u_n \bullet v_1 \bullet \cdots \bullet v_m) =$$
$$u_1 \circ \cdots \circ u_n \circ v_1 \circ \cdots \circ v_m = h(u) \circ h(v),$$

also ist h ein Homomorphismus. $\square$

Definition

Es sei Σ ein Alphabet.
Dann ist $(\Sigma^*, \cdot)$ das von Σ frei erzeugte Monoid.

Die Elemente von Σ^* nennen wir *Wörter* (über Σ).

Falls $L \subseteq \Sigma^*$, dann nennen wir L eine *Sprache* (über Σ).

Falls $u, v \in \Sigma^*$, dann schreiben wir auch uv statt $u \cdot v$.

Das neutrale Element von $(\Sigma^*, \cdot)$ bezeichnen wir mit ϵ.

Theorem

Es seien Σ und Γ Alphabete. Jede Abbildung $\Sigma \to \Gamma^*$ läßt sich eindeutig auf einen Homomorphismus $\Sigma^* \to \Gamma^*$ erweitern.

Beweis.

Es sei $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Dann ist $h(w) = h(w_1 \ldots w_n)$ mit $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma = h(w_1) \ldots h(w_n)$ weil h ein Homomorphismus ist. □

Wenn wir einen Homomorphismus definieren wollen, genügt es, seine Wirkung auf Symbole zu beschreiben.