RWTH Aachen **SS 2017**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Blatt 1
Rossmanith–Dreier–Hark–Kuinke 1.5.2017

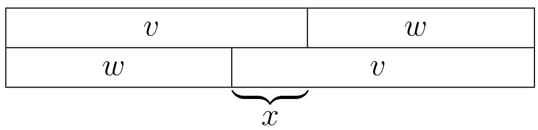
Übung zur Vorlesung Formale Sprachen, Automaten und Prozesse

Aufgabe T1

Es seien $v, w \in \Sigma^*$, so daß $vw = wv$.
Beweisen Sie: Es existieren $u \in \Sigma^*$, $i, j \in \mathbf{N}_0$ mit $v = u^i$, $w = u^j$.

Lösungsvorschlag:

Beweis durch Induktion über $|vw|$.



- Falls $|vw| = 0$, dann folgt die Aussage mit $u = \varepsilon$: $v = u^0$ und $w = u^0$.
- Falls $|vw| > 0$:
  - Falls $|v| = |w|$, dann gilt $v = w$ und für $u = v = w$ und $i = j = 1$ gilt nun $u^i = u^j = v = w$.
  - Falls $|v| > |w|$ ($|w| > |v|$ analog), dann existiert ein $x \in \Sigma^+$ mit $wx = v$ und $xw = v$. Da $|wx| < |vw|$ existiert durch Induktionsschluß ein $u \in \Sigma^*$, so daß $x = u^i$ und $v = u^j$. Somit gilt $w = u^{i+j}$.

Aufgabe T2

Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Wenn wir das Wort w rückwärts schreiben, so nennen wir es w^R. Das ist aber keine anständige Definition.

1. Definieren Sie die Abbildung $\cdot^R$ formal.
2. Ist $w \mapsto w^R$ ein Homomorphismus?

Lösungsvorschlag:

1. Bei einem freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ hat jedes Wort w eine eindeutige Darstellung $w = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$ mit $c_i \in \Sigma$. Somit läßt sich die Umkehrung definieren als $w^R := c_n \cdot \ldots \cdot c_1$.
2. Falls $|\Sigma| = 1$, dann gilt o.B.d.A. $\Sigma = \{a\}$. Somit gilt $w^R = (w_1 \ldots w_n)^R = (a \ldots a)^R = a^R \ldots a^R = w$. Allerdings, für $|\Sigma| > 1$, wähle $a, b \in \Sigma$, $a \neq b$. Dann gilt $(ab)^R = ba$, aber $a^R b^R \neq (ab)^R$. Somit ist $w \mapsto w^R$ kein Homomorphismus.

Aufgabe T3

Finden Sie einen regulären Ausdruck, dessen Sprache alle Wörter in den beiden linken Spalten enthält und keines der Wörter in der rechten Spalte.

babcb	*bbaa*	*cbbbcaaac*
aabcbcb	*abcb*	*ccbcccacb*
baabbccaac	*accaa*	*cacbaacc*
bbbbaa	*abacaca*	*accbaaca*
ccac	*abcaacbcc*	*cbccbacbcb*
bbaacacc	*baccacaab*	

Lösungsvorschlag:

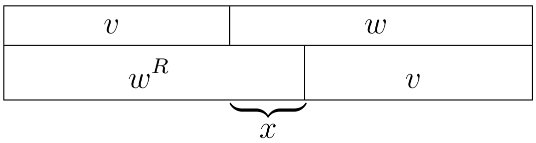
Unser Vorschlag ist $(a + b)^*(a + c)^*(b + c)^*$. Es gibt natürlich unendlich viele richtige Lösungen. Die faulste Lösung ist $babcb + aabcbcb + baabbccaac + bbbbaa + ccac + bbaacacc + abcaaaaca + bbaa + abcb + accaa + abacaca + abcaacbcc + baccacaab$.

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Gegeben seien $v, w \in \Sigma^*$ mit $vw = w^R v$, und $|w| \geq |v|$.
Beweisen oder widerlegen Sie, daß dann $(vw)^R = vw$ gilt.

Lösungsvorschlag:

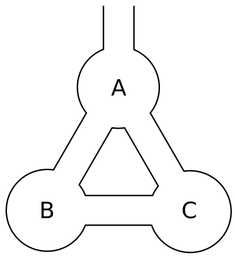
Wegen $vw = w^R v$ und $|w| \geq |v|$ existiert ein $x \in \Sigma^*$ mit $w = xv$ und $w^R = vx$.



Dann gilt aber auch $xv = w = (w^R)^R = (vx)^R = x^R v^R$. Also ist insbesondere $v = v^R$. Daraus folgt dann leicht

$$vw = w^R v = w^R v^R = (vw)^R.$$

Aufgabe H2 (10 Punkte)



Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der jeden (nicht leeren) Pfad durch das nebenstehende Museum beschreibt. Ein Pfad startet im Raum A und endet ebenfalls dort. Beispielsweise wäre ABCABABCA ein gültiger Pfad aber ABBA oder ε nicht.

Lösungsvorschlag:

Anschaulich können wir einen Weg durch das Mini-Atomium folgendermaßen gliedern: Wir kehren immer wieder in den Raum A zurück und bewegen uns dazwischen zwischen den Räumen B und C. Letzteres läßt sich durch den regulären Ausdruck

$$H = (BC)^+ + (BC)^*B + (CB)^+ + (CB)^*C$$

beschreiben. Die vier Teile entsprechen den Wegen, die

1. in B beginnen und in C enden,
2. in B beginnen und in B enden,
3. in C beginnen und in B enden und
4. in C beginnen und in C enden.

Der gesamte reguläre Ausdruck ist dann

$$(AH)^*A = \Big[A\Big((BC)^+ + (BC)^*B + (CB)^+ + (CB)^*C\Big)\Big]^*A.$$