

Beweis (des Theorems)

Ersetze Q durch $Q' = Q \times \{1, 2, 3\}$ und F durch $F' = Q \times \{3\}$ und δ durch δ' mit:

Falls $\delta(q, \epsilon, Z) = \{(p, \gamma)\}$ setze

$$\delta'((q, 1), \epsilon, Z) := \begin{cases} \{((p, 1), \gamma)\} & \text{falls } p \notin F \\ \{((p, 2), \gamma)\} & \text{falls } p \in F \end{cases}$$

somit $\delta'((q, 2), \epsilon, Z) := \{((p, 2), \gamma)\}$

Falls $\delta(q, a, Z) = \{(p, \gamma)\}$ für $a \in \Sigma$ setze

$\delta'((q, 1), \epsilon, Z) := \{((q, 3), Z)\}$ und

$$\delta'((q, 2), a, Z) = \delta'((q, 3), a, Z) := \begin{cases} \{(p, 1), \gamma\} & \text{falls } p \notin F \\ \{(p, 2), \gamma\} & \text{falls } p \in F \end{cases}$$

Neuer Startzustand: $(q_0, 1)$ falls $q_0 \in F$, $(q_0, 2)$ sonst.

„1“: Nach dem letzten Zeichens keinen Endzustand durchlaufen

„2“: Nach dem letzten Zeichens einen Endzustand durchlaufen

Theorem

Es seien L und L' kontextfreie und R eine reguläre Sprache. Dann sind $L \cap R$, $L \setminus R$, $L \cup L'$ und LL' wieder kontextfreie Sprachen.

Beweis.

Schnitt und Differenz: Produktautomat.

Vereinigung: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N, T, P_2, S_2)$.
 $G = (N, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}, S)$, $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Konkatenation: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N, T, P_2, S_2)$.
 $G = (N, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$, $L(G) = L(G_1)L(G_2)$.

Kleene'sche Hülle: $G_1 = (N, T, P_1, S_1)$.
 $G = (N, T, P_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid S_1\}, S)$, $L(G) = L(G_1)^*$. □

Theorem

CFL ist nicht unter Komplement abgeschlossen und damit auch nicht unter Schritt.

Beweis.

Es sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i \geq j \vee k \geq j \vee i + k \leq j\}$

Offensichtlich ist L kontextfrei.

Es sei $\bar{L} = \{a, b, c\}^* \setminus L$ und $L' = \bar{L} \cap a^* b^* c^*$.

Falls $\bar{L}$ kontextfrei wäre, dann auch L' .

$L' = \{a^i b^j c^k \mid i < j \wedge k < j \wedge i + k > j\}$ ist aber nicht kontextfrei (Pumping-Lemma).

Also ist auch $\bar{L}$ nicht kontextfrei. □

Theorem

DCFL ist nicht unter Vereinigung und daher auch nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Beweis.

Wir definieren drei DCFLs:

- $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq j \},$
- $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid k \geq j \},$
- $L_3 = \{ a^i b^j c^k \mid i + k \leq j \}.$

$L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ist eine CFL, ihr Komplement ist aber keine CFL.

Wäre $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ eine DCFL, wäre auch das Komplement eine CFL. □

Die Chomsky-Hierarchie besteht aus vier Stufen:

- Chomsky-0: Rekursiv aufzählbare Sprachen
Unbeschränkte Grammatiken: $abAc \rightarrow Bcb$
- Chomsky-1: Kontextsensitive Sprachen
Kontextsensitive Grammatiken: $abAc \rightarrow abBCc$,
 $aBCD \rightarrow abCaAbCD$, kein $A \rightarrow \epsilon$
- Chomsky-2: Kontextfreie Sprachen
Kontextfreie Grammatiken: $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow bCaAb$
- Chomsky-3: Reguläre Sprachen
Linkslineare Grammatiken: $A \rightarrow a$, $B \rightarrow bC$

Definition

Eine linkslineare Grammatik ist eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \rightarrow aB$, $C \rightarrow b$ und $D \rightarrow \epsilon$ mit $A, B, C, D \in N$ und $a, b \in T$.

Theorem

Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.

Lemma

Jede linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.

Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

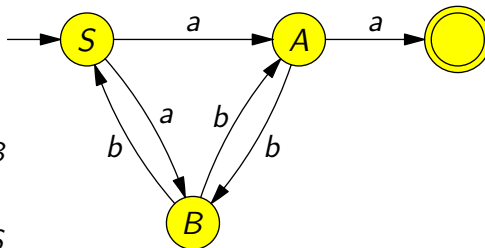
Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.

Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren.



Beispiel

$S \rightarrow aA \mid aB$
 $A \rightarrow a \mid bB$
 $B \rightarrow bA \mid bS$



Lemma

Jede reguläre Sprache wird durch eine linkslineare Grammatik erzeugt.

Beweis.

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.

Definiere die Grammatik $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit den Produktionen

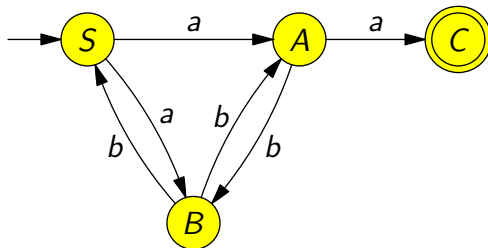
- ① $q \rightarrow ap$ falls $p \in \delta(q, a)$ und
- ② $q \rightarrow \epsilon$ falls $q \in F$.

Mit Induktion über $|w|$:

$p \in \hat{\delta}(w, q_0)$ gdw. $q_0 \xRightarrow{*} wp$.



Beispiel



$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow aC \mid bB$$

$$B \rightarrow bA \mid bS$$

$$C \rightarrow \epsilon$$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$$L = \{ \$w\$w\$ \mid w \in \{a, b\}^* \}$$

$$S \rightarrow LMR$$

$$M \rightarrow AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$$$

$$\bar{A}A \rightarrow A\bar{A}, \quad \bar{A}B \rightarrow B\bar{A}$$

$$\bar{B}A \rightarrow A\bar{B}, \quad \bar{B}B \rightarrow B\bar{B}$$

$$\bar{A}R \rightarrow AR, \quad \bar{B}R \rightarrow BR$$

$$L \rightarrow \$$$

$$R \rightarrow \$$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$