

Sättigungsschritte

Sei $L = L(M)$ für einen NFA M .

Wir transformieren M in einen NFA M' mit $L(M') = pre_G^*(L)$ durch folgende Regeln:

Falls

- ① $A \rightarrow \alpha \in P$ und
- ② $p \in \hat{\delta}(q, \alpha)$

dann füge den Übergang $q \xrightarrow{A} p$ zum Automaten hinzu.

Wiederhole dies, bis nichts mehr hinzugefügt werden kann.

Definition

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit $\Sigma = N \cup T$.

Wir definieren für $k \geq 0$:

① $M_G^0 = M$

② $M_G^{k+1} = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ mit

$$\delta'(q, a) = \delta_{M_G^k}(q, a) \text{ falls } a \in T,$$

$$\delta'(q, A) = \delta_{M_G^k}(q, A) \cup \{p \in Q \mid p \in \hat{\delta}_{M_G^k}(q, \beta) \text{ und } A \rightarrow \beta \in P\}.$$

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $G = (N, T, P, S)$ eine CFG mit $\Sigma = N \cup T$.

- ① $pre^0(L) := L$
- ② $pre^{k+1}(L) := \{ \alpha \mid \alpha \Rightarrow \beta \text{ für ein } \beta \in pre^k(L) \} \cup pre^k(L)$

Offensichtlich:

$$pre^*(L) = \bigcup_{n \geq 0} pre^n(L)$$

Induktion über k : $pre^k(L) \subseteq L(M^k)$

Es sei $\alpha \in pre^k(L)$. Zwei Möglichkeiten:

- ① $\alpha \in pre^{k-1}(L) \stackrel{IV}{\subseteq} L(M^{k-1}) \subseteq L(M^k)$.
- ② $\alpha \Rightarrow \beta$ und $\beta \in pre^{k-1}(L) \subseteq L(M^{k-1})$.

D.h. $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ und $A \rightarrow \gamma \in P$.

Nach IV gilt $\beta \in L(M^{k-1})$, also

$$q_1 \in \hat{\delta}_{M^{k-1}}(q_0, \alpha_1)$$

$$q_2 \in \delta_{M^{k-1}}(q_1, A)$$

$$q_3 \in \hat{\delta}_{M^{k-1}}(q_2, \alpha_2) \text{ mit } q_3 \in F$$

Dann gilt $q_2 \in \delta_{M^k}(q_1, A)$ und $q_3 \in \hat{\delta}_{M^k}(q_0, \alpha)$.

Induktion über k : $L(M^k) \subseteq pre^*(L)$

Es sei $\alpha \in L(M^k)$.

Wieder zwei Möglichkeiten:

① $\alpha \in L(M^{k-1})$, dann $\alpha \in pre^*(L)$ nach IV.

② Sonst:

$$\alpha = \alpha_0 A_0 \alpha_1 A_1 \dots \alpha_m A_m \alpha_{m+1}$$

$$\beta = \alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_m \beta_m \alpha_{m+1}$$

und $\beta \in L(M^{k-1})$, $A_i \rightarrow \beta_i \in P$ für $0 \leq i \leq m$.

Nach IV gilt $\beta \in pre^*(L)$.

Es gilt $\alpha \xRightarrow{*} \beta$ und damit auch $\alpha \in pre^*(L)$.

Beweis der zentralen Aussage

Theorem

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre_G^(L)$ regulär.*

Beweis.

Wir haben bereits gezeigt:

- ① $pre^k(L) \subseteq L(M^k)$
- ② $L(M^k) \subseteq pre^*(L)$

Außerdem: $L(M^m) = L(M^{m+1}) = L(M^{m+2}) = \dots$ für ein $m \in \mathbf{N}$.

Es folgt daraus, daß $L(M^m) = pre^*(L)$.

$L(M^m)$ ist als Sprache eines NFAs regulär.



Das Wortproblem

Definition

Das *Wortproblem* für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$ und ein Wort $w \in T^*$
- Frage: Gilt $w \in L(G)$?

Theorem

Das Wortproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

$w \in L(G)$ gdw. $S \in pre^*({w})$.



Unproduktive Symbole

Definition

Finden von unproduktiven Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der unproduktiven Symbole von G :
 $\{ A \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } A \xRightarrow{*} w \}$

Theorem

Unproduktive Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der produktiven Symbole ist $N \cap pre^*(T^*)$. □

Das Leerheitsproblem

Definition

Das Leerheitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G) = \emptyset$?

Theorem

Das Leerheitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Es ist $L(G) = \emptyset$ gdw. $S \notin pre^*(T^*)$.



Unerreichbare Symbole

Definition

Finden von unerreichbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der unerreichbaren Symbole von G :
 $\{ A \in N \mid \text{es gibt kein } \alpha A \beta \in (N \cup T)^* \text{ mit } S \xRightarrow{*} \alpha A \beta \}$

Theorem

Unerreichbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

A unerreichbar gdw. $S \notin pre^*((N \cup T)^* A (N \cup T)^*)$



Nullierbare Symbole

Definition

Finden von nullierbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der nullierbaren Symbole von G :
 $\{ A \in N \mid A \Rightarrow^* \epsilon \}$

Theorem

Nullierbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der nullierbaren Symbole ist $N \cap pre^*(\{\epsilon\})$. □

Das Endlichkeitsproblem für CFG

Definition

Das Endlichkeitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G)$ endlich?

Theorem

Das Endlichkeitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Ersetze G durch G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$, aber G' enthält keine unproduktiven, unerreichbare oder nullierbare Symbole.

$|L(G)| = \infty$ gdw. es gibt $A \in N$ mit

$A \in pre_{G'}^* \left((N \cup T)^+ A (N \cup T)^* \cup (N \cup T)^* A (N \cup T)^+ \right).$

