

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist in polynomieller Zeit lösbar:

Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache L

Frage: Ist $L = \emptyset$?

Beweis.

DFA, NFA: Ist ein Endzustand vom Anfangszustand erreichbar?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln.



Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Wortproblem für reguläre Sprachen ist in quadratischer (DFA: linearer) Zeit lösbar:

Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache L

Frage: Ist $w \in L$?

Beweis.

DFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit: $O(|M| + |w|)$

NFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit: $O(|M| + |Q|^2 \cdot |\Sigma| + |Q|^2 \cdot |w|)$

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln.



Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:

Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache $L \subseteq \Sigma^$*

Frage: Ist $L = \Sigma^$?*

Beweis.

DFA: Sind alle erreichbaren Zustände Endzustände?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

NFA, regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln.

Exponentielle Laufzeit.



Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist in linearer lösbar:

Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache $L \subseteq \Sigma^$*

Frage: Ist L endlich?

Beweis.

NFA, DFA: Gibt es

- ① eine starke Zusammenhangskomponente, die vom Startzustand erreichbar ist, und
- ② von der aus ein Endzustand erreichbar ist?

Lineare Laufzeit (Konstruktion der starken Zusammenhangskomponenten: Datenstrukturen und Algorithmen)



Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Theorem

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:

Eingabe: Zwei DFAs, NFAs oder reguläre Ausdrücke für Sprachen L_1 und L_2

Frage: Ist $L_1 = L_2$?

Beweis.

DFA: Minimiere beide und teste ob sie dann isomorph sind.

NFA, Regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln.



Kontextfreie Grammatik

Definition

Eine *kontextfreie Grammatik* ist ein 4-Tupel (N, T, P, S)

- N ein Alphabet der *Nonterminale* oder *Variablen*
- T ein Alphabet der *Terminalsymbole*
- P Menge von *Produktionen* der Form $A \rightarrow \alpha$
mit $A \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$
- $S \in N$ das *Startsymbol*

Wir verlangen $N \cap T = \emptyset$.

Satzformen sind die Wörter aus $(N \cup T)^*$.

Notation:

Wir verwenden oft

- $a, b, c, \dots$ für Terminalsymbole
- $A, B, C, \dots$ für Nonterminale
- $u, v, w, \dots$ für Terminalwörter aus T^*
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ für Satzformen

Beispiel

Eine kontextfreie Grammatik:

$$G = (\{E, A\}, \{0, 1, +, -, (,)\}, P, E)$$

mit

$$P = \{E \rightarrow (E + E), E \rightarrow (E - E), E \rightarrow A, A \rightarrow 0, A \rightarrow 1, A \rightarrow AA\}$$

Ableitungen

Wir definieren die Relation

$$\Rightarrow_G : (N \cup T)^* \rightarrow (N \cup T)^*$$

vermöge

$$\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta \text{ falls } A \rightarrow \gamma \in P.$$

$\Rightarrow_G$ heißt Ableitungsrelation.

$\Rightarrow_G^*$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\Rightarrow_G$

Beispiel

$$G = (\{E, A\}, \{0, 1, +, -, (,)\}, P, E)$$

mit

$$P = \{E \rightarrow (E + E), E \rightarrow (E - E), E \rightarrow A, A \rightarrow 0, A \rightarrow 1, A \rightarrow AA\}$$

$$E \Rightarrow (E + E) \Rightarrow (E + A) \Rightarrow (A + A) \Rightarrow (AA + A) \Rightarrow (A0 + A) \Rightarrow (A0 + 1) \Rightarrow (10 + 1) \in T^*$$

Wir geben in Zukunft oft nur die Produktionen an.

(Wenn klar ist was N , T und das Startsymbol sind.)

Sprache einer Grammatik

Definition

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Wir definieren $L(G) = \{ w \in T^* \mid S \xRightarrow{*} w \}$.

$L(G)$ ist die von G erzeugte Sprache.

Wir nennen $\alpha \in \beta$ einen *Ableitungsschritt* und

$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_{n-1} \Rightarrow w$ eine *Ableitung* von w .

Eine Ableitung ist eine Linksableitung, falls in jedem Schritt das am weitesten links stehende Nonterminal ersetzt wird.
(Rechtsableitung analog).