

Die Myhill–Nerode–Relation $\equiv_L$

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$.

Definiere $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ vermöge

$$u \equiv_L v \iff uw \in L \iff vw \in L \text{ für alle } w \in \Sigma^*.$$

Der *Index* einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Interessanter Fall: $\equiv_L$ hat endlichen Index.

Beispiel 1

Es sei $L = 0^*1^*$.

- $001 \equiv_L 0111$
- $010 \not\equiv_L 0111$, denn $010 \notin L$, $0111 \in L$.
- $00 \not\equiv_L 00001$, denn $000 \in L$, $000010 \notin L$.

Wieviele Äquivalenzklassen hat $\equiv_L$?

Drei:

- 1 0^*
- 2 0^*1^+
- 3 $0^*1^+0(0+1)^*$

Beispiel 2

Was ist der Index von $\equiv_L$ für diese Sprachen?

- ① $L = \{0, 1\}^*$
- ② $L = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$
- ③ $L = \emptyset$
- ④ $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist Vielfaches von } 7\}$
- ⑤ $L = \{3, 3., 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots\}$
- ⑥ $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- ⑦ $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
- ⑧ $L = \{a^n b^m \mid |n - m| < 5\}$

Lemma (A)

$L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\implies \equiv_L$ hat endlichen Index.

Beweis.

- ① L regulär und $L = L(M)$ mit DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- ② Definiere $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
- ③ $u \sim v \implies u \equiv_L v$, denn $uw \in L \iff vw \in L$ falls $\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
- ④ Also hat $\sim$ mindestens so viele Äquivalenzklassen wie $\equiv_L$.
- ⑤ $\sim$ hat aber endlichen Index.



Lemma (B)

$L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\iff \equiv_L$ hat endlichen Index.

Beweis.

- ① $L \subseteq \Sigma^*$ und Index von $\equiv_L$ sei endlich.
- ② Konstruiere $M = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\equiv_L}, F)$ mit
 - $Q = \{ [w]_{\equiv_L} \mid w \in \Sigma^* \}$
 - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q, ([w]_{\equiv_L}, a) \mapsto [wa]_{\equiv_L}$
 - $F = \{ [w]_{\equiv_L} \mid w \in L \}$
- ③ Q endlich, da Index von $\equiv_L$ endlich.
- ④ δ wohldefiniert, da $[u]_{\equiv_L} = [v]_{\equiv_L} \Rightarrow [ua]_{\equiv_L} = [va]_{\equiv_L}$
- ⑤ $L(M) = L$, da $\hat{\delta}([\epsilon]_{\equiv_L}, w) = [w]_{\equiv_L}$.



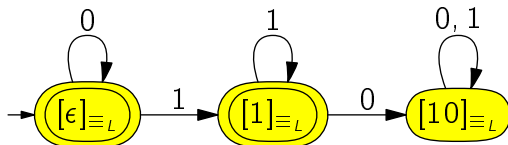
Beispiel

Es sei $L = 0^*1^*$.

$\equiv_L$ hat die Äquivalenzklassen

- ① $[\epsilon]_{\equiv_L} = 0^*$,
- ② $[1]_{\equiv_L} = 0^*1^+$ und
- ③ $[10]_{\equiv_L} = 0^*1^+0(0+1)^*$.

Der Myhill–Nerode–Automat:



Der Satz von Myhill-Nerode

Theorem

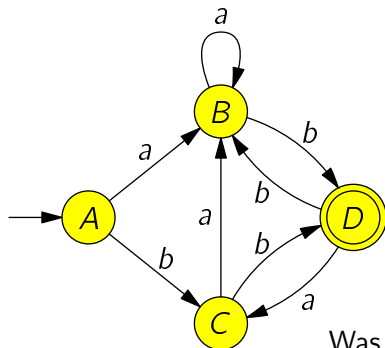
- 1 $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann regulär, wenn $\equiv_L$ endlichen Index hat.
- 2 M ein DFA $\implies \sim_M$ ist eine Verfeinerung von $\equiv_{L(M)}$.
- 3 Es gibt zu jeder regulären Sprache $L \in \Sigma^*$ einen bis auf Isomorphie eindeutigen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(M)$.

Beweis.

- 1 Folgt aus Lemma A und B.
- 2 Beweis von Lemma A: $u \sim v \Rightarrow u \equiv_L v$.
- 3 Da $\sim$ eine Verfeinerung von $\equiv_L$ ist, muß $\sim = \equiv_L$ gelten, wenn ihre Indexe gleich sind.



Beispiel

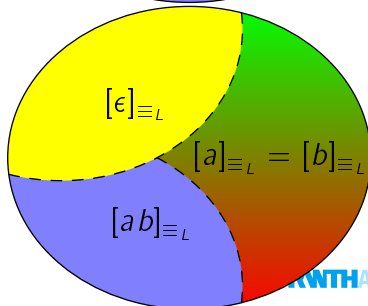
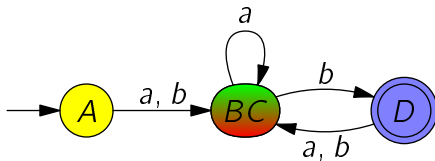
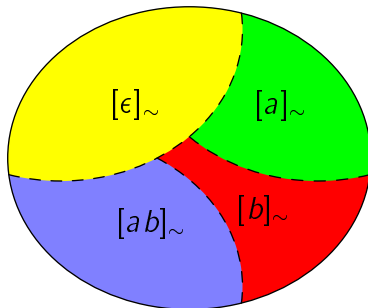
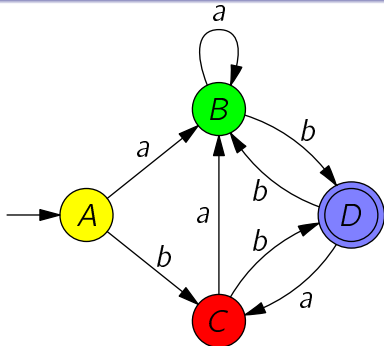


Was sind die Äquivalenzklassen von $\sim$?

Natürlich $[\epsilon]_\sim$, $[a]_\sim$, $[b]_\sim$ und $[ab]_\sim \dots$

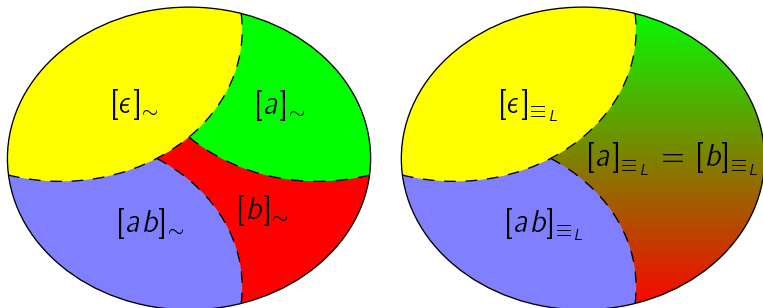
Was sind die Äquivalenzklassen von $\equiv_{L(M)}$?

Es sind $[\epsilon]_\sim$, $[a]_\sim \cup [b]_\sim$ und $[ab]_\sim$.



$\sim$ ist Verfeinerung von $\equiv_L$.

Eindeutigkeit des minimalen DFA



- Jede Äquivalenzklasse von $\equiv_L$ ist Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\sim$.
- Jede Äquivalenzklasse von $\sim$ ist eindeutig einem Zustand zugeordnet.
- Haben $\sim$ und $\equiv_L$ den gleichen Index, dann sind sie gleich.

Definition

Es seien DFAs gegeben:

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

Eine Abbildung $h: Q \rightarrow Q'$ mit

- ① $h(q) \in F' \iff q \in F$
- ② $h(q_0) = q'_0$
- ③ $h(\delta(q, a)) = \delta'(h(q), a)$

heißt *Homomorphismus* von M nach M' .

Ist h bijektiv, dann ist es ein *Isomorphismus*.

Es $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

$\sim$ definiert vermöge $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.

Sei $M' = (Q', \Sigma, \delta', [\epsilon]_{\sim}, F')$ mit

- $Q' = \Sigma^* / \sim$ (Äquivalenzklassen von $\sim$)
- $\delta': ([w]_{\sim}, a) \mapsto [wa]_{\sim}$
- $F' = \{ [w]_{\sim} \mid w \in L(M) \}$

M und M' sind isomorph.

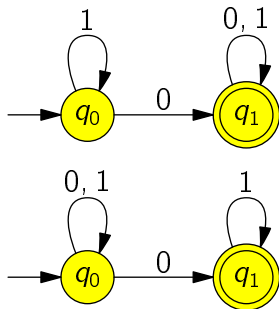
$h: q \mapsto \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q \}$ ist ein Isomorphismus.

Folgerung: Alle minimalen Automaten sind isomorph:

- M' hängt nur von L und $\sim$ ab.
- $\sim = \equiv_L$, falls M minimal.
- Also hängt M' *nur* von L ab (der Myhill-Nerode-DFA).

Frage:

Sind auch kleinste NFAs isomorph?



Gegenbeispiel! Beide akzeptieren $(0 + 1)^*0(0 + 1)^*$.

Die Eindeutigkeit des minimalen DFAs ist etwas besonderes!

Andere Konsequenz des Satzes von Myhill–Nerode:

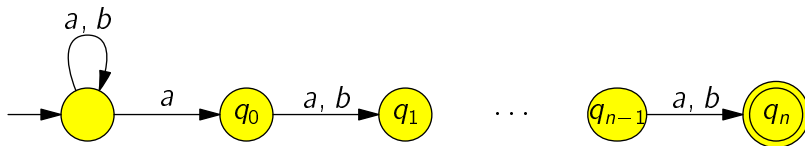
Die Anzahl der Zustände des minimalen Automaten für L ist der Index von $\equiv_L$.

Zwei wichtige Anwendungen:

- 1 Untere Schranken für die Anzahl der Zustände.
- 2 Beweis, daß eine Sprache nicht regulär ist.

Es sei $L = (a + b)^* a(a + b)^n$ mit $n \in \mathbf{N}$.

NFA für L :



Es sind $n + 2$ Zustände.

Wähle $N = (a + b)^n$.

Behauptung: Falls $u, v \in N$ mit $u \neq v$, dann $u \not\equiv_L v$.

Beweis:

o.B.d.A. $u = wau'$, $v = wbv'$. Dann $ua^{n-|u'|} \in L$, $va^{n-|u'|} \notin L$.

Also hat $\equiv_L$ mindestens $|N| = 2^n$ viele Äquivalenzklassen.

Jeder DFA der L akzeptiert, hat mindestens 2^n Zustände.