

DFAs erkennen reguläre Sprachen

Theorem

M ein DFA $\Rightarrow L(M)$ regulär

Beweis

Idee: $w \in L_{ij}^k$ genau dann wenn

- 1 $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
- 2 $\hat{\delta}(q_i, u) = q_m$ mit $m \leq k$ für alle $u \sqsubseteq w$, $u \neq \epsilon$, $u \neq w$
($u \sqsubseteq v$ gdw. $ux = v$ für ein x)

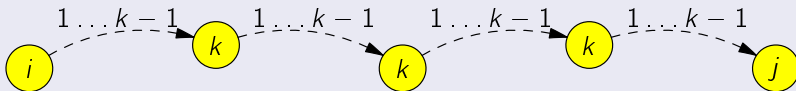
Anschaulich:

- 1 w bringt M von q_i nach q_j .
- 2 Dazwischen durchläuft M nur Zustände aus $\{q_1, \dots, q_k\}$.

Beweis.

$$L_{ij}^0 := \begin{cases} \{ a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j \} & \text{falls } i \neq j, \\ \{ a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_i \} \cup \{\epsilon\} & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

$$L_{ij}^k := L_{ij}^{k-1} \cup L_{ik}^{k-1} (L_{kk}^{k-1})^* L_{kj}^{k-1} \text{ für } k > 0$$



Korrektheit: Induktion über k .

Es ist leicht reguläre Ausdrücke für L_{ij}^k zu finden.

Regulärer Ausdruck für $L(M) = \bigcup_{q_j \in F} L_{1j}^n$.



Der Komplementäutomat

Theorem

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

Dann ist $\Sigma^ - L(M)$ regulär.*

$\Sigma^ - L$ ist das Komplement von L .*

Beweis.

$M' := (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$.

Es gilt $L(M') = \Sigma^* - L(M)$:

$$\hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \notin Q - F$$



Der Produktautomat

Definition

Es seien $M' = (\Sigma, Q', \delta', q'_0, F')$ und $M'' = (\Sigma, Q'', \delta'', q''_0, F'')$ zwei DFAs.

Wir definieren den *Produktautomaten* $M = M' \times M''$:

$M = (\Sigma, Q' \times Q'', \delta, (q'_0, q''_0), F' \times F'')$
mit $\delta((q, p), a) = (\delta'(q, a), \delta''(p, a))$.

Theorem

Wenn M' und M'' DFAs sind und $M = M' \times M''$, dann
 $L(M) = L(M') \cap L(M'')$.

Beweis.

$$\hat{\delta}((q'_0, q''_0), w) = (\hat{\delta}'(q'_0, w), \hat{\delta}''(q''_0, w))$$

(Induktion über $|w|$)

und damit

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}((q'_0, q''_0), w) \in F' \times F'' \\ &\Leftrightarrow (\hat{\delta}'(q'_0, w), \hat{\delta}''(q''_0, w)) \in F' \times F'' \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \text{ und } \hat{\delta}''(q''_0, w) \in F'' \\ &\Leftrightarrow w \in L(M') \text{ und } w \in L(M''). \end{aligned}$$

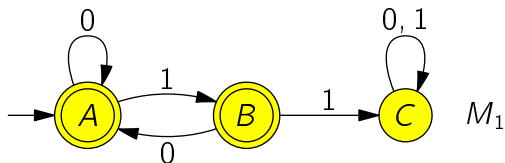
Daher ist $L(M) = L(M') \cap L(M'')$.



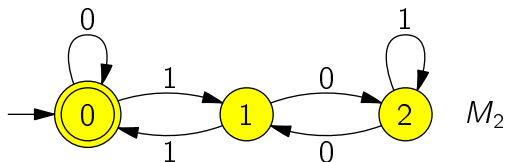
Beispiel

Konstruiere DFA für Sprache aller w mit:

- 1 Es kommt 11 nicht als Unterwort in w vor.



- 2 Als Binärzahl ist w durch drei teilbar.



Konstruiere $M_1 \times M_2$!

