♡ Übung zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen ♡

Tutoraufgabe T23

Finden Sie einen parametrisierten Algorithmus, der entscheidet, ob ein einem Graphen k knotendisjunkte Krallen vorhanden sind. Eine Kralle ist ein $K_{1,3}$.

Lösungsvorschlag

Color Coding: Färbe jeden Knoten iid (independent with identical distribution) gleichverteilt mit einer von k Farben. Suche dann in den einfarbigen Teilgraphen jeweils eine Kralle. Die Krallensuche geht offenbar in $O(n^4)$ Schritten. Falls k knotendisjunkte Krallen existieren, dann werden sie mit Wahrscheinlichkeit $p = k!/(4k)^k$ korrekt (jeweils in einer Farbe, und alle verschieden) gefärbt. Da diese Wahrscheinlichkeit nur von k abhängt, haben wir also einen fixed-parameter-Algorithmus.

Die Laufzeit ist geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Eine Standardrechnung (nachrechnen!) zeigt, daß der Erwartungswert der Laufzeit dann $1/p$ ist, und mit Markovs Ungleichung brauchen wir mindestens $2/p$ Versuche mit Wahrscheinlichkeit höchstens $1/2$. Ein alternativer Beweis: Die Wahrscheinlichkeit für $1/p$ Fehlversuche (wenn eine Lösung existiert) ist $(1-p)^1/p$, mit $1 + x \leq e^x$ ist das weniger als e^{-x}. So oder so haben wir eine konstante Fehlerwahrscheinlichkeit nach $O((4k)^k/k!) = O^*((4e)^k)$ Schritten mit der Abschätzung nach Stirling.

Tutoraufgabe T24

Überlegen Sie, welche der folgenden Graphprobleme mit Color Coding lösbar sind:

1. Gibt es einen induzierten Pfad der Länge k?
2. Gibt es k Sterne mit fünf Strahlen?
3. Gibt es eine k-Clique?

Lösungsvorschlag

1. Die Idee beim k-Pfad war, daß wir uns keine konkreten Knoten merken, sondern nur, welche der k Farben wir bisher verwendet haben. Dadurch erhalten wir Tabellen der Größe $2^k n$. Für einen *induzierten* Pfad müssten dennoch wissen, welche konkreten Knoten wir bisher verwendet haben, da man sonst nicht entscheiden kann, ob es weitere Kanten zwischen den Knoten gibt. Darum läßt sich Colorcoding nicht anwenden.

2. Ja, analog zu Tutoraufgabe T23.

3. Vermutlich nicht.

Tutoraufgabe T25
Finden Sie einen deterministischen Algorithmus für das Krallenproblem aus Aufgabe T23.

Tutoraufgabe T26
Kann man mit Hilfe von Bodlaenders Satz entscheiden, ob ein Graph eine unabhängige Menge der Größe mindestens k enthält?

Hausaufgabe H15
Ist das folgende Problem fixed-parameter tractable?
Gegeben sind ein planarer Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten für Orte und dessen Kanten für Nachbarschaften stehen, sowie eine natürliche Zahl k. Lassen sich k Giftmülldeponien auf die Orte verteilen, so daß sich in der Nachbarschaft eines jeden Ortes, inklusive des Ortes selbst, jeweils höchstens eine Deponie befindet?

Hausaufgabe H16
Ist das folgende Problem in FPT? Gegeben ein Parameter k und ein planarer Graph G, gibt es k knotendisjunkte Kreise in G?

Lösungsvorschlag Falls die Baumweite des Graphen groß ist ($f(k)$), so enthält er ein $2k \times 2k$-Gitter und somit auch k disjunkte Kreise. Andernfalls kann analog zur vorherigen Übung eine MSO-Formel konstruiert werden, die genau dann wahr ist, wenn G k disjunkte Kreise enthält. Nach Courcelle ist das Problem dann in FPT.

Hausaufgabe H17 (hard!)
Zeigen Sie, daß das Problem Partial Vertex Cover in FPT ist: Gegeben ein Graph G und zwei natürliche Zahlen k, t, gibt es k Knoten in G, die mindestens t Kanten überdecken? Achtung, dabei ist nur t der Parameter, nicht aber k.
Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, den Graphen mit zwei Farben zu färben, so daß die Lösungsmenge eine Farbe erhält und ihre Nachbarn eine andere.

Lösungsvorschlag
Wir können von $t > k$ ausgehen, da das Problem sonst sehr einfach zu lösen ist. Falls es einen Knoten mit Grad t gibt, so ist dieser Knoten alleine ein partial vertex cover. Andernfalls färben wir den Graphen zufällig mit zwei Farben. Eine Färbung ist gut, wenn eine Lösung mit O gefärbt wurde und die Nachbarschaft mit 1. Dies sind höchstens $k + k \cdot (t - 1)$ Knoten. Eine gute Färbung erreichen wir also mit Wahrscheinlichkeit $1/2^{kt}$. Wir müssen dann nur noch aus den Komponenten mit Färbung 0 diejenigen Komponenten finden, die zur Lösung gehören.
Dazu berechnen wir für jede Komponente der Färbung 0, wieviele Kanten sie covert. Gibt es mehr als k Komponenten mit jeweils s Knoten, die l jeweils Kanten covern, so reicht es, nur k dieser Komponenten zu betrachten, da die anderen äquivalent sind und höchstens k Komponenten ausgewählt werden können.
Die Anzahl der übrig bleibenden Komponenten ist in $f(t)$ beschränkt. Eine vollständige Suche findet also eine gültige Lösung, falls eine existiert. Die Laufzeit ist durch $f(t) poly(|V|)$ beschränkt. Durch genügend Wiederholungen kann die Erfolgswahrscheinlichkeit beliebig erhört werden.