RWTH Aachen **WS 2016**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 12
Kuinke–Rossmanith–Sanchez 26.1.2017

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 30

Zunächst einmal können wir zu der intuitiven Einsicht gelangen, daß ein planarer Graph nicht ausschließlich aus Knoten hohen Grades bestehen kann.

Tatsächlich folgt aus Eulers Formel $|V| - |E| + |F| = 2$ und einigen grundsätzlichen Überlegungen, daß ein endlicher ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen und ohne Multikanten höchstens $3|V| - 6$ Kanten haben kann, wenn $|V| \geq 3$ gilt.

Den Sonderfall, daß es kein inneres *face* gibt, möge man sich getrennt überlegen; man sieht leicht, daß die obige Schranke für alle derartigen Graphen mit mindestens drei Knoten gilt. Ansonsten verwenden wir die folgende Argumentation:

Jedes *face* berührt mindestens drei Kanten. Jede Kante berührt höchstens zwei *faces*. Deshalb gilt $|F| \leq \frac{2}{3}|E|$ und somit $|E| \leq 3|V| - 6$. Daraus folgt, daß jeder planare Graph einen Knoten v des Grades höchstens fünf hat.

Fügen wir v dem Independent Set hinzu, werden höchstens 5 Knoten aus einer optimalen Lösung blockiert. Da wir in jedem Schritt $N[v]$ aus dem Graph entfernen, ist der übrige Graph erneut planar und wir können das Verfahren wiederholen.

Die Laufzeit ist offensichtlich polynomiell, der Algorithmus also eine 5-Approximation.

Eine 4-Approximation erhält man, indem man den 4-Farben Satz anwendet und die Größte der Farbklassen als Independent Set wählt.

Tutoraufgabe 31

Man zerlege das Gitter in Teilgraphen der Größe k. Dazu muss man höchstens $mn/\sqrt{k} + nm/\sqrt{k}$ Knoten entfernen. Dies ist leicht einzusehen, da man das vollständige Gitter in Felder der Größe $\sqrt{k} \times \sqrt{k}$ zerlegen kann.

Berechnet man für die Teilinstanzen der Größe k eine optimale Lösung, so ergibt sich für die Güte $F^*(G) - F(G) \leq 2nm/\sqrt{k}$. Da eine optimale Lösung mindestens $(n \times m)/2$ Knoten enthält (da der Graph bipartit ist), ergibt sich die Güte

$$\frac{2nm/\sqrt{k}}{nm/2} \leq \frac{4}{\sqrt{k}}.$$

Wählt man k groß genug, so ist diese Güte kleiner als ein beliebiges ϵ. Die Laufzeit des Algorithmus ist offensichtlich $2^k p(n, m)$ für ein Polynom p.

Tutoraufgabe 32

Das Problem ist NP-schwer, da sich leicht eine Reduktion vom folgenden Rucksackproblem findet: Gegeben sind k Rucksäcke der Größe C und Gegenstände mit Gewicht $c_1, \ldots, c_m$. Falls mit diesen Werten ein Scheduling eine Wartezeit von höchstens k möglich ist, so können alle Gegenstände in die k Rucksäcke gepackt werden.

Ein Approximationsalgorithmus kann wie folgt vorgehen: Fülle die Tassen der Größe nach, solange bis die Kanne leer ist. Fülle danach dort weiter, wo in der letzten Runde abgebrochen wurde. Sobald die kleinste Tasse abgearbeitet ist, wird der Rest Tee verschüttet und in der nächsten Runde von vorne begonnen.

Um die Approximationsgüte zu ermitteln, reicht es aus, die Zeit zu vergleichen, in der jeweils alle zum ersten Mal mit Tee versorgt werden. Für unseren Algorithmus entspricht dies gerade der globalen maximalen Wartezeit, da der Schedule immer wiederholt wird. Für die optimale Lösung ist dieser Wert eine untere Schranke der Wartezeit.

Da in jedem Schritt die Kanne mindestens zur Hälfte geleert wird, eine optimale Lösung aber höchstens die ganze Kanne nutzt, ergibt sich ein Approximationsfaktor von 2.

Hausaufgabe 20 (15 Punkte)

Wir beginnen mit einer beliebigen Partition von V. Falls es einen Knoten $v \in V_i$ gibt, der mehr Nachbarn in V_i als in V_j hat, dann verschieben wir v nach V_j. Sobald es keinen solchen Knoten mehr gibt, haben wir eine 7/6 Approximation gefunden.

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß der Algorithmus in polynomieller Zeit terminiert. Offensichtlich kann v in polynomieller Zeit gefunden werden. Das Verschieben ist ebenso in polynomieller Zeit möglich. Dabei erhöht sich aber die Anzahl der geschnittenen Kanten mindestens um 1, es gibt also höchgstens $|E|$ Vertauschungsoperationen.

Güte: $\deg_i(v)$ die Anzahl der Kanten von v zu Knoten in V_i. Falls $v \in V_s$, so gilt offensichtlich $\deg_i(v) \geq \deg_s(v)$ für alle $1 \leq i \leq 7$. Das bedeutet daß mindestens $6/7 \deg(v)$ Kanten adjazent zu v geschnitten werden. Da in einer optimalen Lösung höchstens alle Kanten geschnitten werden, ergibt sich eine Güte von

$$\frac{|E|}{1/2 \sum_{v \in V} 6/7 \deg(v)} \leq \frac{7|E|}{6|E|}.$$