RWTH Aachen **WS 2016**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Lösungsvorschlag 10
Kuinke–Rossmanith–Sanchez 12.1.2017

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 26

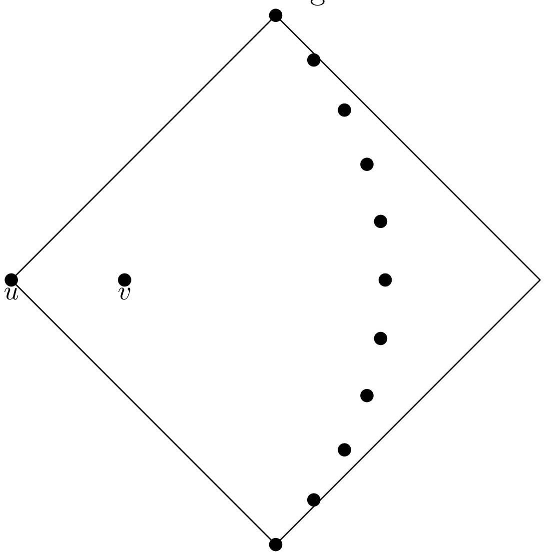
Wir packen Rechtecke rekursiv an alle möglichen Positionen und brechen ab, wenn ein Rechteck nicht mehr platziert werden kann. Es gibt vielfältige Möglichkeiten zur Verbesserung dieses Grundschemas. Beispielsweise können wir die Rechtecke gemäß ihres Flächeninhalts vorsortieren oder die Restfläche berechenen und so vorzeitig hoffnungslose Teillösungen erkennen.

Tutoraufgabe 27

Offensichtlich liefert der Algorithmus eine $O(|U|)$ Approximation, wenn U die Menge der Universitäten ist. Wir zeigen nun, daß er tatsächlich nicht besser ist.

Der folgende Beweis gibt eine sehr genaue untere Schranke für die Güte des Algorithmus an. Es gibt aber auch einfachere Lösungen, die zum Ergebnis kommen, daß der Algorithmus keine konstante Güte hat.

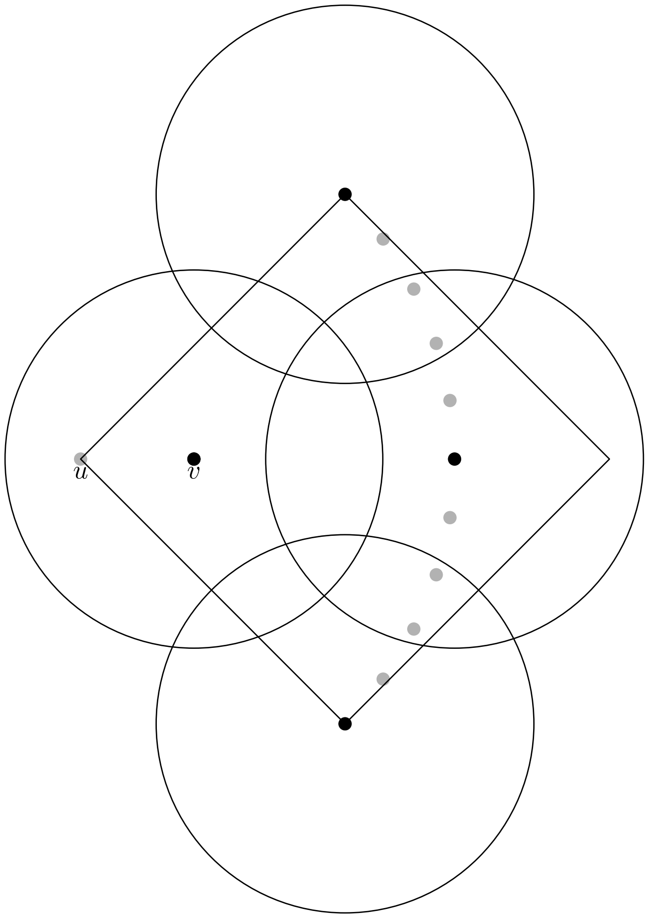
Wir betrachten das folgende Land L:



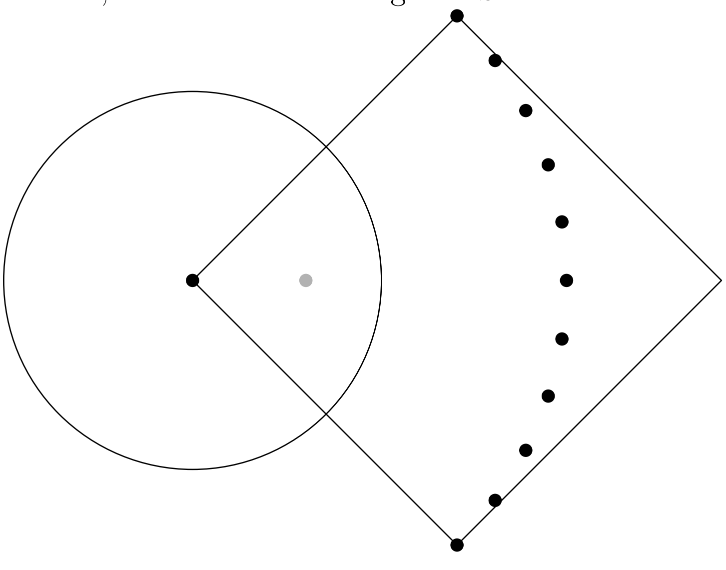
Der Abstand der Knoten ist dabei so gewählt, daß u und v genau $0.3d$ auseinanderliegen und der Abstand von u zu jedem Knoten auf der rechten Seite genau $(1+\alpha)d$ ist. Sei t die Anzahl der Knoten rechts und bezeichne R alle Knoten außer u, v (also $|R| = t$). Der Winkel zwischen zwei Knoten rechts ist genau $(t-1)/(0.5\pi)$. Die Menge aller Universitäten ist also $U := R \cup \{u, v\}$.

Sei $w \in R$ und $E(v) = \{u \in \mathbf{R^2} \mid dist(u, v) \leq d\}$ der Einzugsbereich eines Knotens (und analog für eine Menge von Knoten).

Eine gute Lösung wäre nun z.B. v und drei weiter Knoten zu behalten. Je nach genauer Positionierung der Knoten rechts reichen sogar zwei von ihnen:



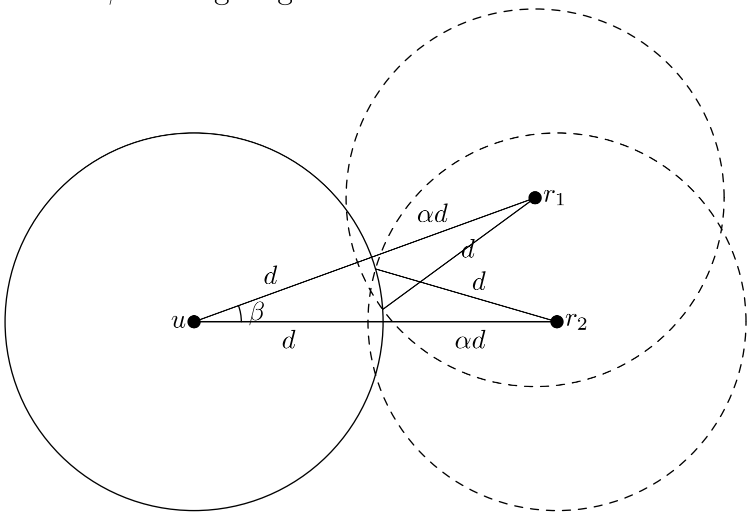
Der Greedyalgorithmus löscht aber möglicherweise v. Dann muss zwingend u bestehen bleiben, und wir erhalten folgende Situation:



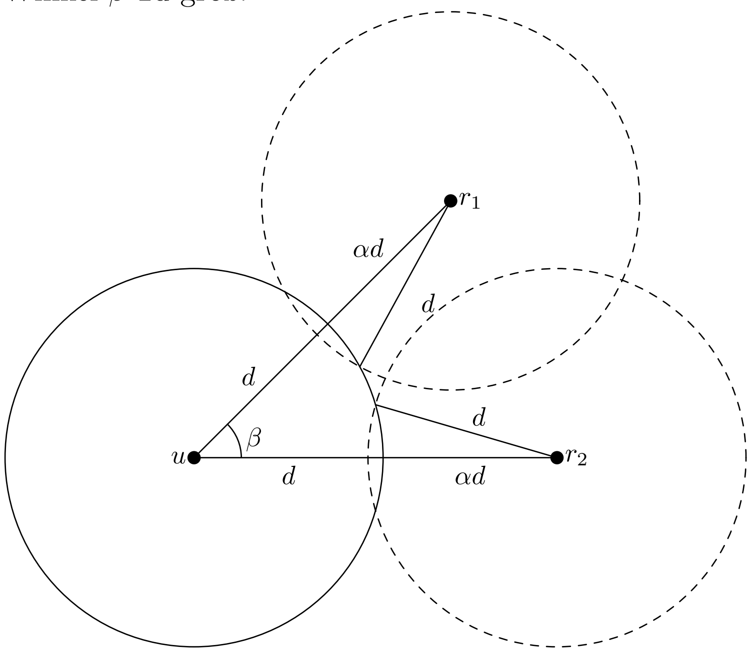
Wir zeigen nun, daß für jedes feste t ein α existiert, sodaß es notwendig ist, alle Knoten aus R zu behalten, falls v gelöscht wird. Daraus folgt dann, daß der Algorithmus keine feste Approximationsgüte liefert, sondern nur eine $O(U)$-Approximation.

Es ist leicht zu sehen, daß eine Teilmenge X von $R \cup \{u\}$ genau dann eine Lösung ist, wenn jeder Punkt des Landes mit Abstand d zu u auch von einem anderen Knoten $r \in X$ abgedeckt wird. Andernfalls entstehen Lücken. Formal also wenn für jeden Punkt $x \in L$ mit $dist(u, x) = d$ ein $r \in X$ existiert mit $dist(r, x) \leq d$. Dies ist genau dann der Fall, falls der Winkel β zwischen zwei benachbarten Knoten $r_1, r_2 \in X$ nicht zu groß ist (abhängig von α).

Winkel β klein genug:



Winkel β zu groß:



Mit etwas Geometrie kommt man leicht zu der Erkenntnis, daß sich für

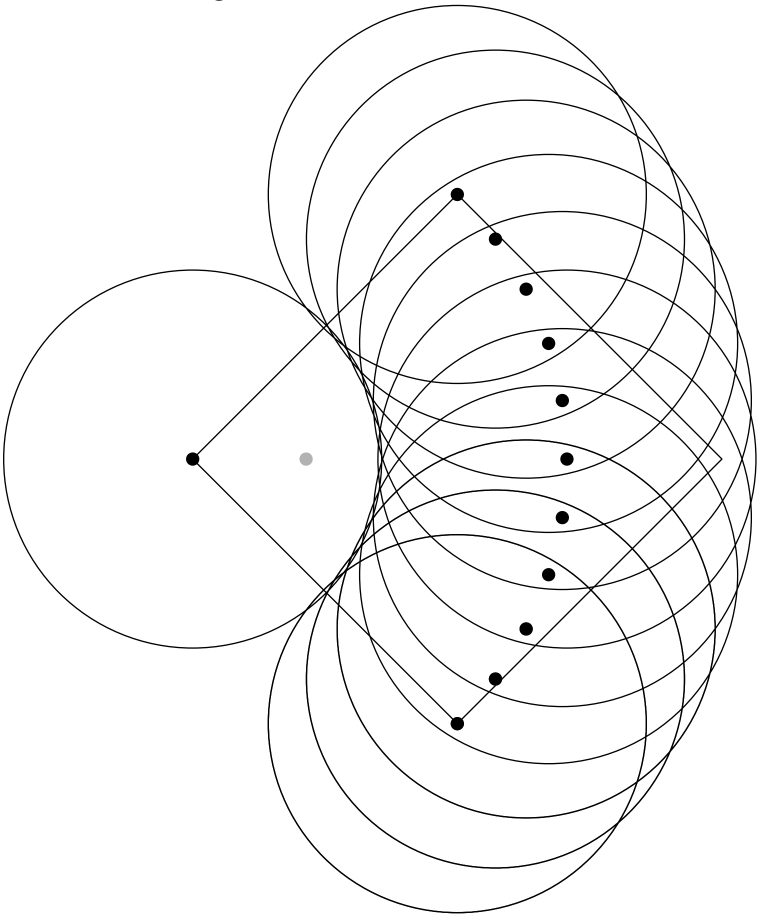
$$\beta \leq 2\cos^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

beide Kreise um r_1 und r_2 auf dem Rand des Kreises um u überlappen. Dazu betrachte man die Mittelsenkrecht der Strecke u, r_1, deren Länge genau $\frac{1}{2}(1+\alpha)d$ ist. Diese geht durch den Schnittpunkt s der Kreise um u und r_1. Im entstehenden rechtwinkligen Dreieck kann man nun leicht alle Winkel berechnen. (Für $\alpha = 1$ ergibt sich übrigens $\beta \leq 0$).

Wählen wir also α derartig, daß

$$|R| = \frac{\pi}{2\cos^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$$

so ist nach dem Löschen von v kein weitere Knoten mehr entfernbar. Eine Lösung sieht dann also zwangsweise soaus:



Da

$$\frac{\pi}{2\cos^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$$

monoton und stetig mit α steigt ist eine solche Wahl möglich.
Wir erhalten somit die untere Schranke $\Omega(|U|)$ für die Approximationsgüte.

Hausaufgabe 18 (10 Punkte)

Ziel ist es, eine 2-Approximation zu berechnen.Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wie schon bekannt, können wir die Minimierungsvariante von Vertex Cover wie folgt als ILP formulieren:
Für jeden Knoten $v_i \in V$ benötigen wir eine Variable x_i. Die Zielfunktion ist dann $\min \sum_{v_i \in V} x_i$. Als Nebenbedingungen erhalten wir $x_i \in \{0, 1\}$ für alle $v_i \in V$ und $x_i + x_j \geq 1$ für jede Kante $\{v_i, v_j\} \in E$. In der Relaxierung als LP wird aus $x_i \in \{0, 1\}$ die Bedingung $x_1 \geq 0$.
Sei nun $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ eine optimale Lösung des relaxierten LPs.Um eine Approximationslösung für Vertex Cover zu erhalten, fügen wir Knoten v_i genau dann dem Vertex Cover hinzu, wenn $\overline{x_i} \geq 0.5$.
Wir müssen nun zeigen, daß $V' = \{v_i \mid \overline{x_i} \geq 0.5\}$ ein Vertex Cover ist und daß V' höchstens doppelt soviele Knoten wie eine optimale Lösung enthält.

1. Sei $\{v_i, v_j\} \in E$ eine beliebige Kante. Da $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ eine zulässige Lösung des relaxierten LPs ist, gilt insbesondere $\overline{x_i} + \overline{x_j} \geq 1$. Dann ist aber entweder $\overline{x_i} \geq 0.5$

oder $\overline{x_j} \geq 0.5$, möglicherweise sogar beide. Daraus folgt, daß mindestens einer der Knoten v_i, v_j in V' enthalten ist.

Somit sind alle Kanten zu V' inzident und V' ist ein Vertex Cover.

2. Ein minimales Vertex Cover C entspricht offensichtlich einer zulässigen Lösung des relaxierten LPs, indem wir $x_i = 1$ setzen, falls $v_i \in C$ und sonst $x_i = 0$. Somit gilt aber für die optimale Lösung L des relaxierten LPs $L \leq |C|$.

   Weiterhing gilt aber auch $|V'| \leq 2L$, da für jeden Knoten $v_i \in V'$ nach Definition $\overline{x_i} \geq 0.5$ gilt.

   Somit ist $|V'| \leq 2L \leq 2|C|$.

Dieser Algorithmus berechnet also eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante des Vertex Cover Problems.