RWTH Aachen **WS 2016**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Übungsblatt 8
Kuinke–Rossmanith–Sanchez 15.12.2016

Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

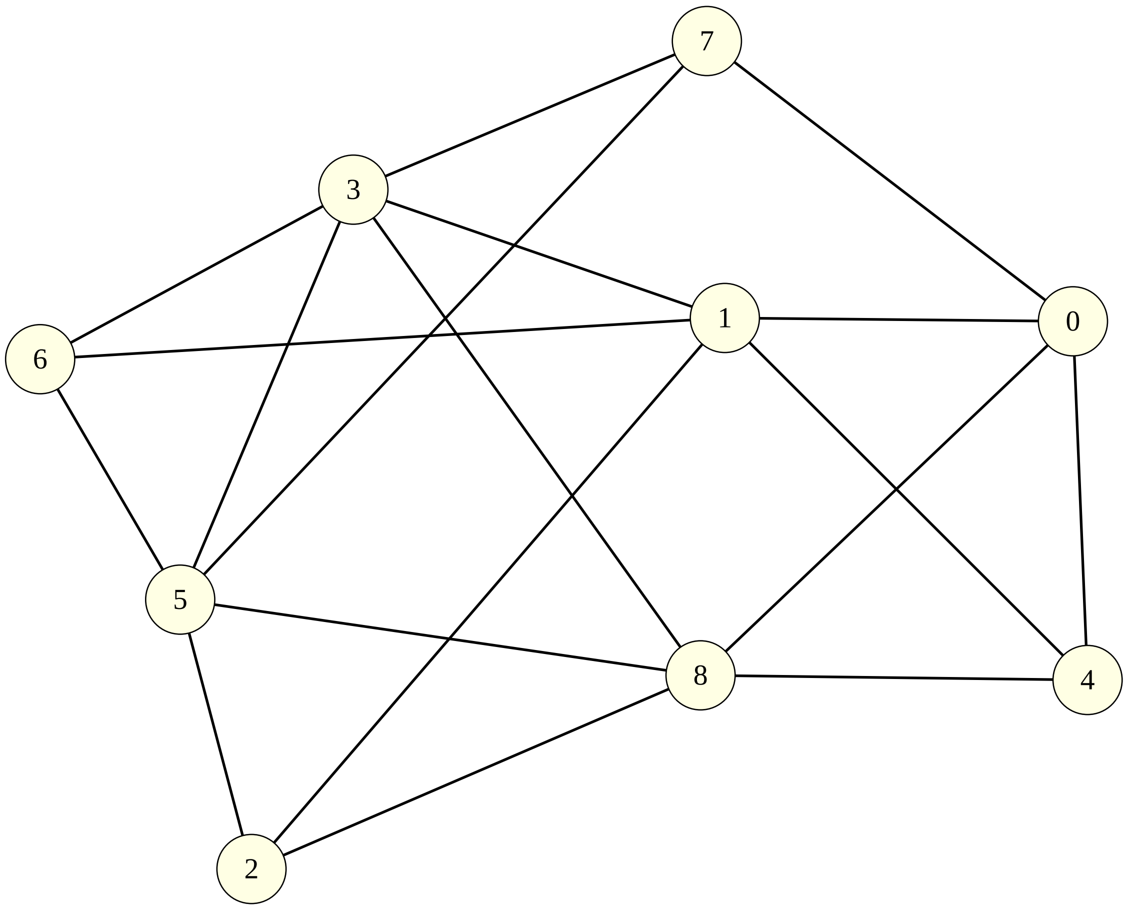
Tutoraufgabe 21

Gegeben ist folgender Algorithmus $\mathcal{V}C$ für VERTEX COVER:

Eingabe: $G = (V, E)$, k

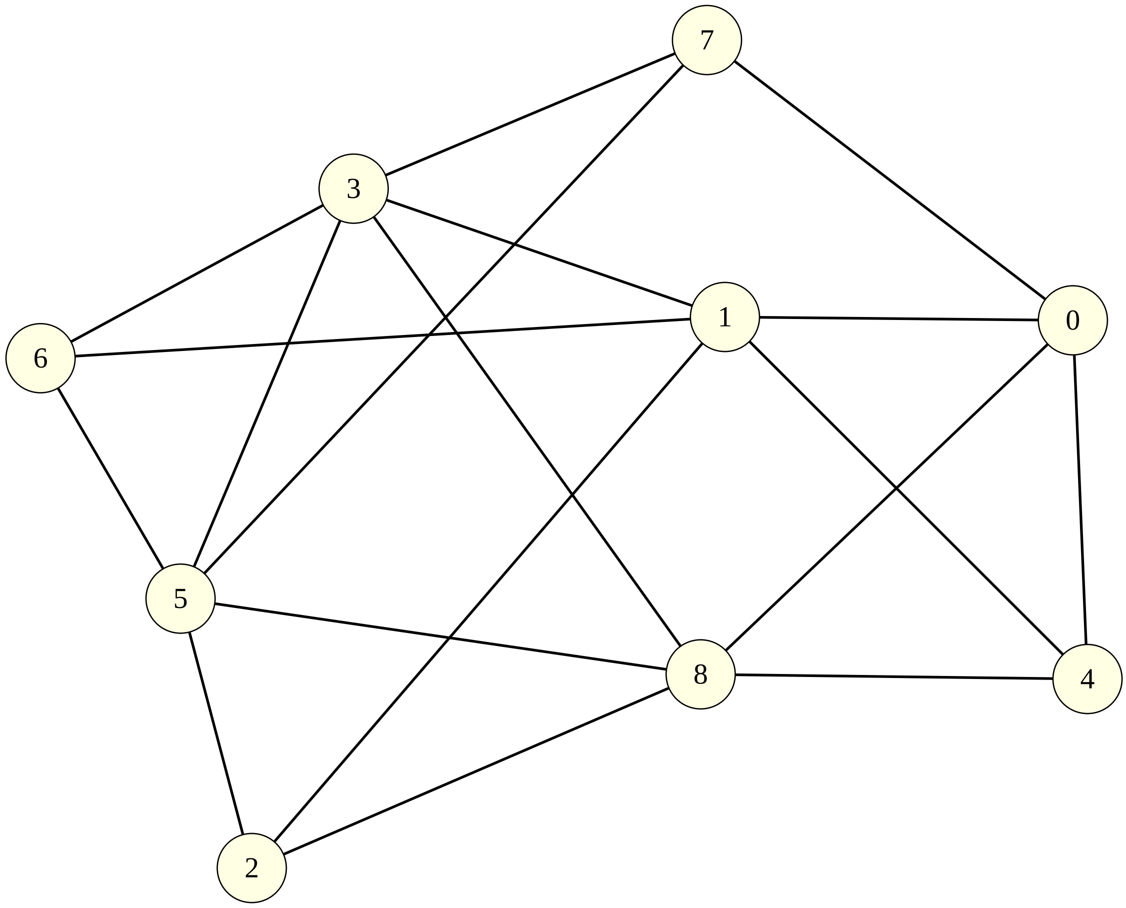
Falls $k \geq 0$ und $E = \emptyset$ return "ja"
Falls $k \leq 0$ return "nein"
Wähle die Kante $\{v_1, v_2\} \in E$ mit kleinster ID.
return $\mathcal{VC}(G \setminus \{v_1\}, k-1)$ or $\mathcal{VC}(G \setminus \{v_2\}, k-1)$

Geben Sie möglichst gute Abschätzungen für die Größe des Suchbaums des Algorithmus auf verschiedenen Graphen an. Die Graphen werden in der Übung zur Verfügung gestellt. Insbesondere betrachten wir diesen Graphen:



Lösung

Wir betrachten folgenden Zufallsgraphen für $k = 5$:



Die ID einer Kante $\{u, v\}$ ist hierbei einfach das Paar $(ID(u), ID(v))$ falls $ID(u) \leq ID(v)$ und sonst $(ID(v), ID(u))$.

Wir müssen nun den Algorithmus simulierenund dabei eine Verzweigung aus allen Möglichkeiten zufällig auswählen. Seien 0011110100 unsere Zufallsbits. Eine 0 bedeutet, daß wir dem ersten rekursiven Aufruf folgen, eine 1 das wir dem zweiten folgen (da es immer genau zwei Möglichkeiten gibt).

Im ersten Schritt wählen wir also die Kante $\{0, 1\}$ und folgen dem Branch in dem 0 zum Vertex Cover hinzugefügt wird. Wir notieren, daß es zwei Möglichkeiten gab und fahren fort auf der Eingabe $(G \setminus 0, k - 1)$. Die folgende Tabelle gibt die weiteren Schritte an:

Kante	Branch	Möglichkeiten	k	Graph	Gewählte Knoten
$\{0, 1\}$	0	2	4	$G \setminus \{0\}$	$\{0\}$
$\{1, 2\}$	0	2	3	$G \setminus \{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
$\{2, 5\}$	1	2	2	$G \setminus \{0, 1, 5\}$	$\{0, 1, 5\}$
$\{2, 8\}$	1	2	1	$G \setminus \{0, 1, 5, 8\}$	$\{0, 1, 5, 8\}$
$\{3, 6\}$	1	2	0	$G \setminus \{0, 1, 5, 8, 6\}$	$\{0, 1, 5, 8, 6\}$

Der Algorithmus bricht nun ab, da die Kante $\{3, 7\}$ noch existiert und $k \leq 0$ gilt. Als Laufzeitschranke erhalten wir $\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^6 - 1$.

Man beachte, daß der von uns zufällig gewählte Pfad zu einem negativen Ergebnis kommt, es aber in dem Graphen sehr wohl ein Vertex Cover der Größe 5 gibt: Im letzten Branch wäre es besser gewesen, Knoten 3 zu wählen. Dies hätte ein Vertex Cover erzeugt $(2, 4, 6, 7$ sind ein Independent Set).

Tutoraufgabe 22

Gegeben ist folgender Algorithmus $\mathcal{DS}$ für Dominating Set:

Eingabe: $G = (V, E)$, k, $V' \subseteq V$

Sei $U = V \setminus N[V']$
Falls $|V'| \leq k$ und $U = \emptyset$ return "ja"
Falls $|V'| \geq k$ return "nein"
Wähle den Knoten $v \in U$ mit kleinster ID.
l="nein";
Für alle Knoten $u \in N[v]$
    Falls $\mathcal{DS}(G, k, V' \cup \{u\})$ setze l="ja"
return l;

Geben Sie möglichst gute Abschätzungen für die Größe des Suchbaums des Algorithmus auf verschiedenen Graphen an. Die Graphen werden in der Übung zur Verfügung gestellt.

Lösung

Wir betrachten wieder den Graphen aus der Lösung zu Tutoraufgabe 16. Analog zur letzten Aufgabe geben wir die rekursiven Aufrufe in einer Tabelle an. Da wir teilweise mehr als zwei Möglichkeiten zur Verzweigung haben, benötigen wir entsprechend viele zufällige Bits (ZB).

v	ZB	u	Möglichkeiten	k	Dominiert	V'
0	10	4	4	1	$\{0, 1, 4, 8\}$	$\{4\}$
2	00	2	4	2	$\{0, 1, 4, 8, 2, 1, 5\}$	$\{4, 2\}$
3	100	6	6	3	$\{0, 1, 4, 8, 2, 1, 5, 6, 3\}$	$\{4, 2, 6\}$
7	00	0	4	4	$\{0, 1, 4, 8, 2, 1, 5, 6, 3, 7\}$	$\{4, 2, 6, 0\}$

Der Algorithmus bricht nun ab, da alle Knoten dominiert sind. Als Laufzeitschranke erhalten wir

$$1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 96 \cdot 3 + 288 \cdot 4 = 1557.$$