Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 18

Das duale LP ist: Maximiere $u + 2v + 3w$ unter $u, v, w \geq 1$.

Tutoraufgabe 19

Das folgende LP modelliert Max-Flow:

$$\begin{array}{lrcll}
\max & f(s,V) & & & \\
\text{unter} & f(u,v) & \leq & c(u,v) & \forall u,v \in V \\
& f(u,V) - f(V,u) & \leq & 0 & \forall u \in V \setminus \{s,t\} \\
& -f(u,V) + f(V,u) & \leq & 0 & \forall u \in V \setminus \{s,t\} \\
& f(u,v) & \geq & 0 & \forall u,v \in V
\end{array}$$

Hier ist wie üblich $f(u,V)$ eine abkürzende Notation für $\sum_{v \in V} f(u,v)$, und diese Variablen stehen für den Fluß durch die Kante $\{u,v\}$. Die Ungleichungen entsprechen gerade der Definition von Flüssen.

Wir wissen, daß es eine optimale Lösung mit ganzzahligem Fluß für das Flußproblem gibt. Eine solche Lösung ist offensichtlich auch eine ganzzahlige Lösung des LPs. Andererseits ist jede Lösung des LPs offensichtlich auch ein gültiger Fluß. Somit ist eine optimale ganzzahlige Lösung des LPs eine optimale Lösung des Flußproblems.

$$\begin{array}{lrcl}
\min & \sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v) \cdot e(u,v) & & \\
\text{unter} & s_s & = & 1 \\
& s_t & = & 0 \\
& e(u,v) - s_u + s_v & \geq & 0
\end{array}$$

Auch hier ist ein optimaler Max-Cut offensichtlich eine optimale ganzzahlige Lösung des LPs. Die Idee hinter diesem LP ist, daß die Variablen s_u genau dann den Wert eins (null) annehmen, wenn der Knoten u in der Menge S (T) liegt. Die Variable $e(u,v)$ soll genau dann den Wert eins annehmen, wenn sie von S nach T führt.

Eine optimale ganzzahlige Lösung des LPs teilt V in S, T mit $S \mathbin{\dot\cup} T = V$ durch $S = \{\, s_s \in V \mid s_s = 1 \,\}$, $T = V \setminus S$. Da jedes $e(u,v)$ in genau einer Ungleichung auftritt, folgt aus $e(u,v) - s_u + s_v \geq 0 \Leftrightarrow e(u,v) \geq s_u - s_v$, daß genau solche $e(u,v)$ auf eins gesetzt werden, für die $s_u = 1, s_v = 0$ gilt (andernfalls wäre die Lösung nicht optimal). Somit ist diese Lösung auch ein gültiger Min-Cut und aufgrund der Optimalität auch ein Min-Cut mit minimalen Kosten.

Schließlich widmen wir uns Teilaufgabe c) zu und skizieren einen Beweis. Nehmen wir an, f ist ein maximaler, aber nicht ganzzahliger Fluß. Betrachten wir die Kanten, die einen nicht ganzzahligen Fluß tragen und vergessen wir ihre Richtungen. Wegen der Flußerhaltung kann ein Knoten nicht nur zu einer solchen Kante inzident sein. Daher können wir einen Kreis aus solchen Kanten finden. Auf diesem Kreis können wir den Fluß um $\pm\epsilon$ für ein $\epsilon > 0$ verändern, ohne die Zulässigkeit des Flusses zu verletzten. Daher ist f keine Ecke des Raums der zulässigen Flüsse.

Tutoraufgabe 20

Erfinden Sie einen möglichst guten Approximationsalgorithmus für das Problem *Triangle Packing*. Dieses besteht aus der Aufgabe, in einem ungerichteten Graphen möglichst viele knotendisjunkte Dreiecke zu finden.

Wir verwenden einfach einen natürlichen *Greedy-Algorithmus:* Finde wiederholt ein Dreieck und lösche es aus dem Graphen. Dadurch erhalten wir eine Menge D von knotendisjunkten Dreiecken. Wie schlecht kann D sein? Es sei O eine optimale Menge von knotendisjunkten Dreiecken. Die Knoten der Dreiecke in D müssen jedes Dreieck in O treffen, denn sonst könnte das nicht getroffene Dreieck in O noch zu D hinzugefügt werden und der Greedy-Algorithmus hätte nicht bei D gestoppt. Jedes Dreieck in D kann aber nur drei Dreiecke in O treffen und wir erhalten $|D| \leq 3|O|$.

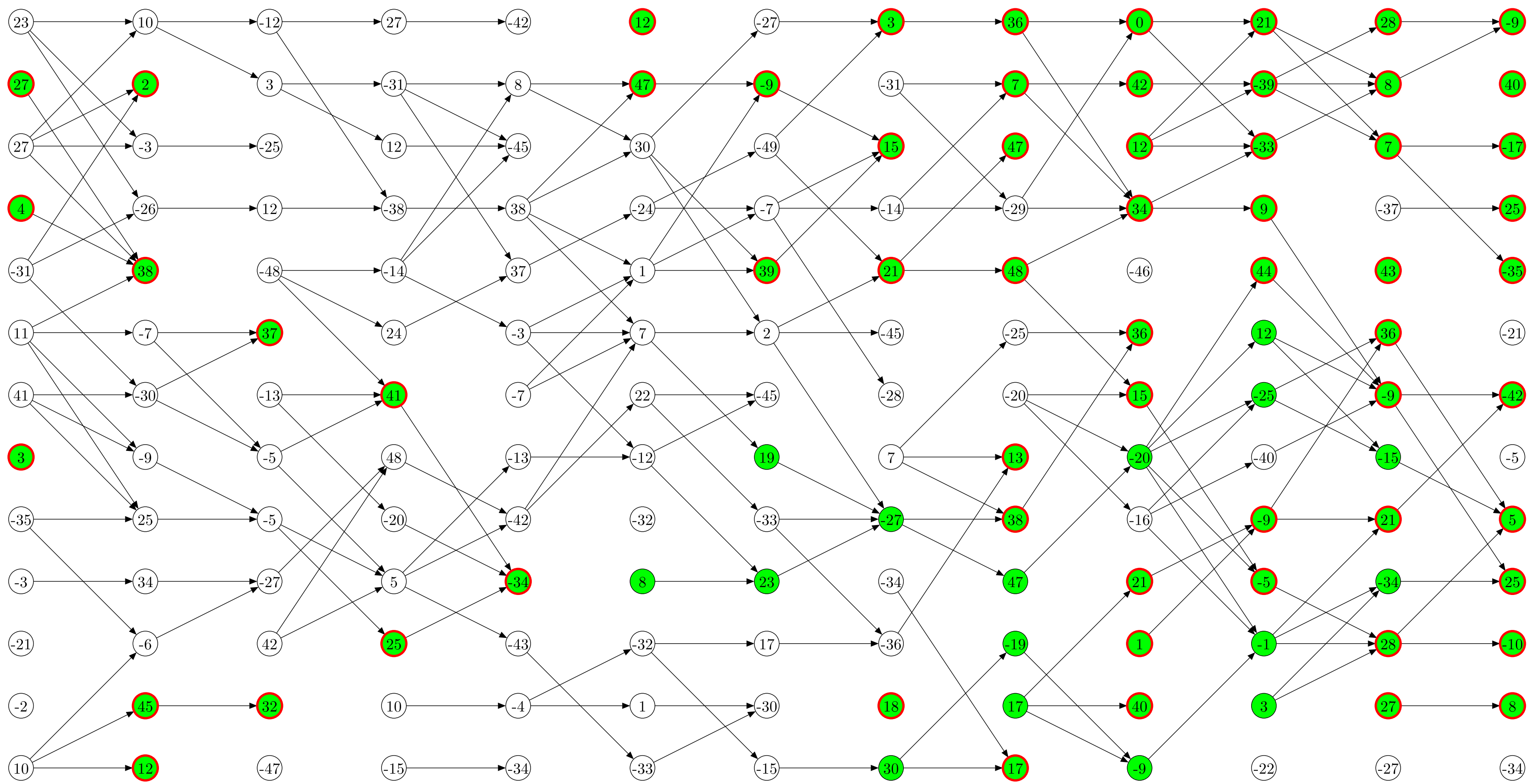
Der einfache Greedy-Algorithmus ist also eine 3-Approximation.

Hausaufgabe 14 (20 Punkte) [1]

[redacted]

Die folgende Seite enthält die beste Lösung, welche auf diese Weise gefunden wurde. In ihr sind die gewählten Knoten grün gefärbt. Der Gewinn ist 961. Rot umrandet sind Knoten, die man durch eine Heuristik findet könnte und die nur ein bißchen schlechter ist.

[1] Aus technischen Gründen bleibt diese Lösung für einige Zeit geheim.



Heuristik: 952.0 Optimal: 961.0