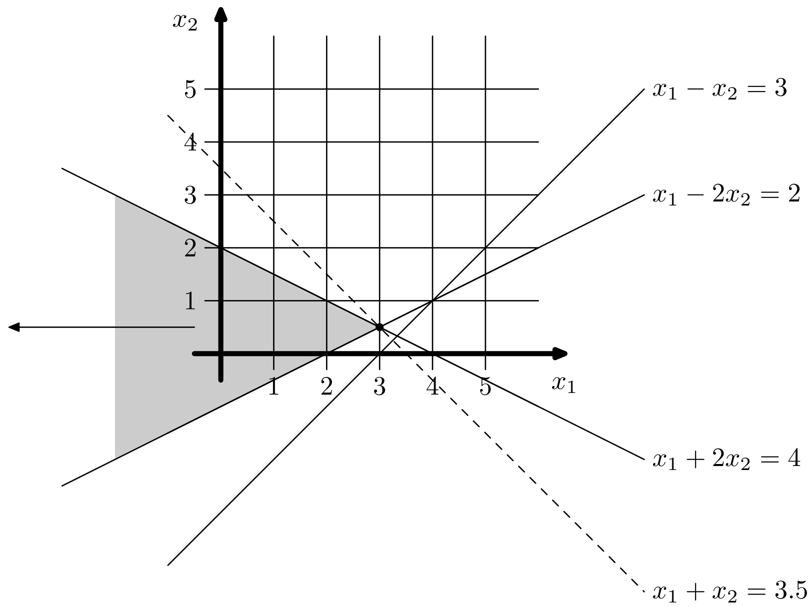
Übung zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Tutoraufgabe 10

Die Bedingungen waren:

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$



Der Lösungsraum ist in grau dargestellt und ist unbeschränkt (er ist nach links offen).

- Für $\max x_1$: visuelle Lösung bei $(3, 0.5)$.
- Für $\max x_2$ gibt es keine optimale Lösung.
- Eine Gerade der Form $c = x_1 + x_2$ ist eingezeichnet. Mit $c = 3.5$ finden wir das maximale c, so daß der Schnitt der Geraden mit dem Lösungsraum nicht leer ist, die optimale Lösung liegt also auch bei $(3, 0.5)$.

Tutoraufgabe 11

Folgendermaßen können wir das lineare Programm direkt mit CPLEX lösen (oder mit `glpsol`):

```
Minimize 3.7x1+4x2+5x3+6x4
subject to
x1+x2+x3+x4=10
```

```
x1>=0
x2>=0
x3>=0
x3<=4
x4>=0
24x1+40x2+73x3+80x4=700
end
```

Für die Maximierung sind nur leichte Änderungen notwendig.
Das LP ist so schon fast in kanonischer Form. Wir müssen nur $-x_3 \geq -4$ anstatt $x_3 \leq 4$ schreiben und die linearen Gleichungen durch Paare von Ungleichungen ersetzen:

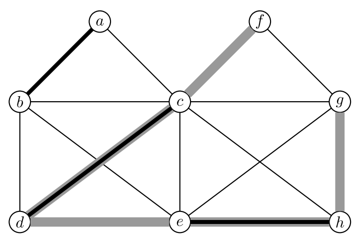
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 10 \\
-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\geq -10 \\
24x_1 + 40x_2 + 73x_3 + 80x_4 &\geq 700 \\
-24x_1 - 40x_2 - 73x_3 - 80x_4 &\geq -700 \\
-x_3 &\geq -4 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0 \\
x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Es ist auch fast in Normalform. Es stört nur die Ungleichung $x_3 \leq 4$, welche wir durch $x_3 - x_5 = 4$, $x_5 \geq 0$ ersetzen können. Insgesamt erhalten wir so die Normalform:

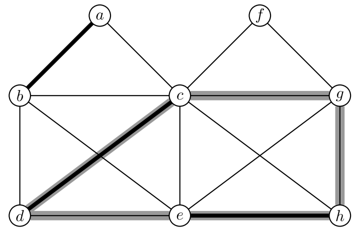
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\
24x_1 + 40x_2 + 73x_3 + 80x_4 &= 700 \\
x_3 - x_5 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 12

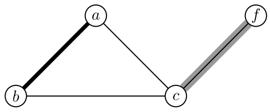
a) Rechts oben gibt es den augmentierenden Pfad fg der Länge eins, welcher mit DFS gefunden werden könnte. Ein komplizierterer ist $fcdehg$:



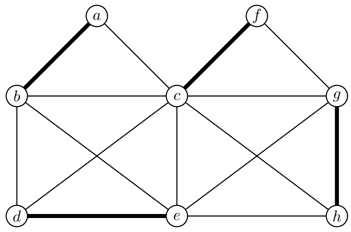
b) Hier ist eine der Möglichkeiten eine Blüte zu finden. Die Tiefensuche besucht die Knoten $fcdehg$ und wählt dann wieder c. Dabei wird die Blüte $cdehg$ entdeckt.



Wir können jetzt die Blüte zu einem Knoten schrumpfen (den wir c nennen) und nach einem neuen alternierenden Pfad suchen. Diese Suche könnte den Pfad cf finden (oder die Blüte cba).



Wir augmentieren den Pfad cf und expandieren dann die geschrumpfte Blüte. Die Matchingkanten auf der Blüte werden jetzt so verschoben, daß der Knoten c der Blüte von ihnen nicht berührt wird.



Hausaufgabe 6

Wir können im wesentlichen die Lösung der vorigen Tutoraufgabe leicht verändern, um das Gewünschte zu erhalten. Nachdem die erste Blüte $cdehg$ zum Knoten c geschrumpft wurde, kann ja eine Tiefensuche, die bei c beginnt, die Blüte cba entdecken. Wenn wir diese schrumpfen (in den Knoten c), dann wird danach zwangsweise der alternierende Pfad fc (oder cf) entdeckt und augmentiert. Dann wird zuletzt beschrumpfte Blüte expandiert. Hier müssen die enthaltenen Matchingkanten nicht verschoben werden und die eine Kante bleibt wo sie vor dem Schrumpfen war. Dann wird die erste Blüte expandiert und wir erhalten das gleiche Ergebnis wie in Tutoraufgabe 12.

Hausaufgabe 7

Bei der Formulierung als LP sind offenbar die Bedingungen

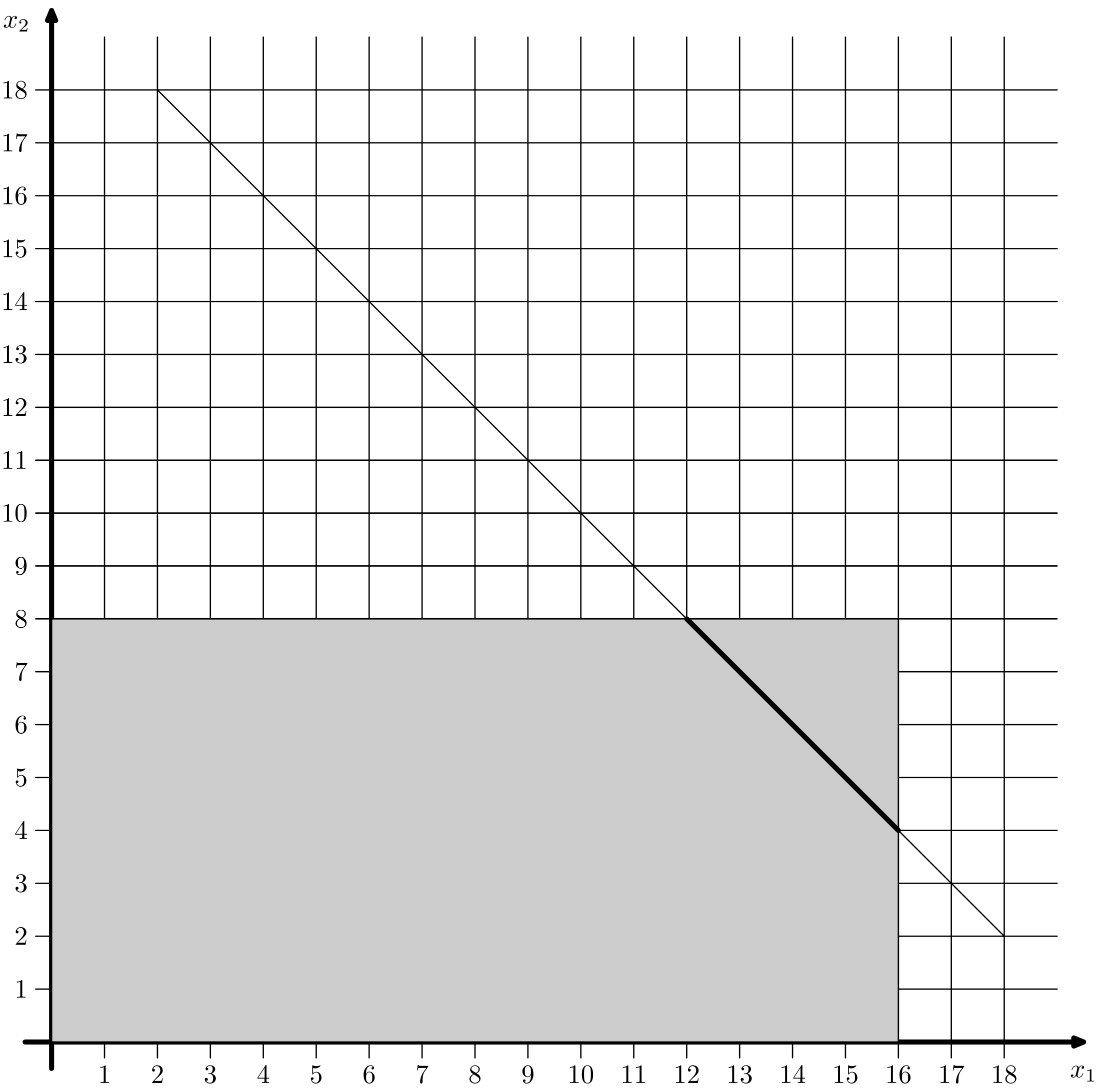
$$N_M = \max\{5.0 - \tfrac{1}{4}x_M, 1.0\}$$
$$N_P = \max\{5.0 - \tfrac{1}{2}x_P, 1.0\}$$

problematisch, die man nicht einfach in ein LP übertragen kann. Auch dürfen formal keine Konstanten in der Zielfunktion auftreten.

Wir behelfen uns folgendermaßen: Zunächst stellen wir fest, daß Werte von $x_M > 16$ und $x_P > 8$ keine Auswirkung auf das Endgehalt haben werden, selbst wenn man mehr lernen sollte. Fügen wir dem LP zwei Bedingungen $x_M \leq 16$ und $x_P \leq 8$ hinzu, können wir aber einfach $N_M = 5.0 - 0.25x_M$ und $N_P = 5.0 - 0.5x_P$ einsetzen. Dieses ergibt zunächst die neue Zielfunktion $c := 10000 + 5000x_M + 1000x_P$, die es zu maximieren gilt. Um nun noch die Konstante 10000 loszuwerden, betrachten wir $c' := c - 10000$, die es nun zu maximieren gilt. Dieses ergibt das folgende LP:

Maximiere $c' = 5000x_M + 1000x_P$ unter
$x_P, x_M \geq 0$
$x_M \leq 16$
$x_P \leq 8$

Aus einer optimalen Lösung c' erhalten wir nun einfach die optimale Lösung $c = c' + 10000$ für unser gesuchtes Problem. Lösung wir das Problem nun graphisch (mit $x_1 := x_M$ und $x_2 := x_P$):



Das Rechteck sind die möglichen Lernzeiten und die zusätzliche Gerade zeigt die Nebenbedingung, daß genau 20 Stunden gelernt werden. Das dick gezeichnete Segment ist also der (eindimensionale) Lösungsraum, wenn man alle Bedingungen berücksichtigt.

Wir müssen nur auf diesem Segment den besten Punkt finden. Wir wissen natürlich, daß wir uns auf die beiden Endpunkte bei der Suche beschränken können. Es könnten entweder 16 Stunden Mathematik und 4 Stunden Programmierung gelernt werden, was die Note 1.0 in Mathematik und 3.0 in Programmierung nach sich zieht, oder 12 Stunden Mathematik und 8 Stunden Programmierung, was die Note 2.0 in Mathematik und 1.0 in Programmierung bedeutet. Die erste Lösung ist besser und damit optimal. Das Anfangsgehalt ist dann 96000 Euro.