

Probeklausur mit Lösungen

Schreiben Sie **Gruppennummer, Name und Matrikelnummer** gut sichtbar und in dieser Reihenfolge oben auf das erste Blatt.

Aufgabe H1 (3+7 Punkte)

a) Geben Sie die Definition eines Matroiden an.

b) Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V, E)$. Wir definieren eine Menge $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ mit $I \in \mathcal{I}$ genau dann, wenn I ein Matching in G ist.

Zeigen Sie entweder, dass (E, \mathcal{I}) ein Matroid ist, oder, dass es einen Graphen gibt, für den (E, \mathcal{I}) kein Matroid ist. Beweisen Sie in beiden Fällen genau Ihr Ergebnis.

Lösungsvorschlag

a) Ein Matroid $M = (S, \mathcal{I})$ besteht aus einer Basis S und einer Familie $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ unabhängigen Mengen mit:

1. Falls $A \subseteq B$ und $B \in \mathcal{I}$, dann $A \in \mathcal{I}$ (M ist hereditär).
2. Falls $A, B \in \mathcal{I}$ und $|A| < |B|$ dann gibt es ein $x \in B \setminus A$ so dass $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ (M hat die Austauscheigenschaft).

Punkte: 3 Punkte für richtig, 2 Punkte für kleinere Fehler, 0 oder 1 Punkte für grobe Fehler

b) Sei $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\})$ ein Pfad der Länge drei. Wir zeigen, dass das durch G erzeugte System (S, \mathcal{I}) kein Matroid ist, weil es die Austauscheigenschaft nicht erfüllt. Sei $A = \{v_2v_3\}$ und $B = \{v_1v_2, v_3v_4\}$. Beide Mengen sind Matchings und somit in \mathcal{I} enthalten. Außerdem $|A| < |B|$. Jedoch ist weder $A \cup \{v_1v_2\}$ noch $A \cup \{v_3v_4\}$ ein Matching.

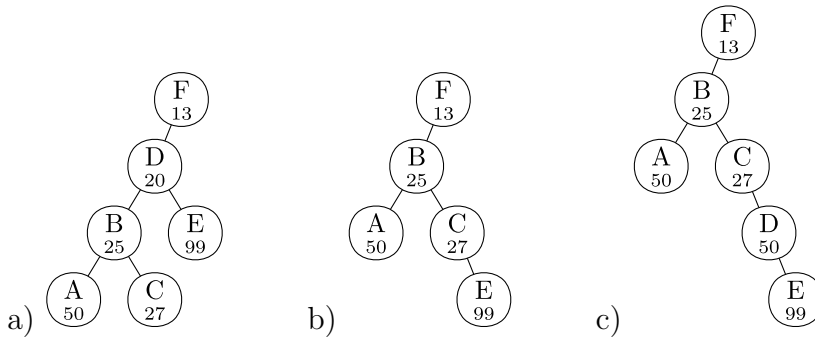
Punkte: 0 Punkte falls man zeigt, dass (S, \mathcal{I}) ein Matroid ist oder nur einen Graphen angibt. Falls man neben dem Graphen auch zwei Mengen A und B angibt, die die Austauscheigenschaft nicht erfüllen 5 Punkte. Falls Gegenbeispiel nur graphisch angeben: 5 Punkte falls sauber beschriftet und im Fließtext ordentlich referenziert. Mit Erklärung dann 7 Punkte.

Aufgabe H2 (4+3+3 Punkte)

Ein Treap habe die Schlüssel A, B, C, D, E, F mit den Prioritäten 50, 25, 27, 20, 99, 13.

- a) Wie sieht er aus? (kleinere Prioritäten oben)
- b) Wie sieht er aus, wenn D gelöscht wird?
- c) Wie sieht er aus, wenn D wieder mit Priorität 50 eingefügt wird?

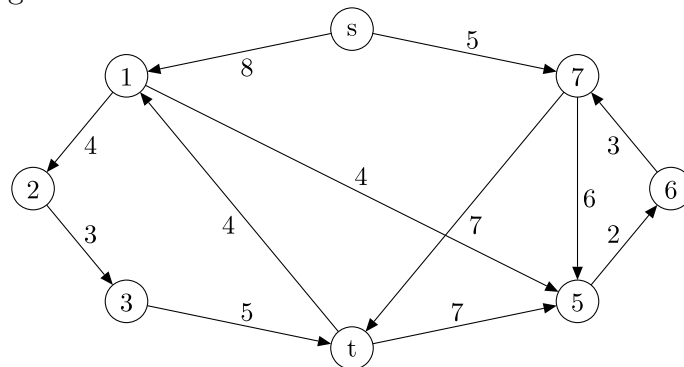
Lösungsvorschlag



Punkte: Da Treaps eindeutig sind, gibt es nur dann volle Punkte, wenn genau der oben stehende Treap abgebildet wurde. Wenn man sieht, dass der Studierende das Prinzip verstanden hat, aber Flüchtigkeitsfehler gemacht hat, gibt es Teilpunkte. Punktabzug ist proportional zum gemachten Fehler. Folgefehler führen nicht zu Punktabzug, solange die Studis sich die Aufgabe dadurch nicht echt einfacher machen.

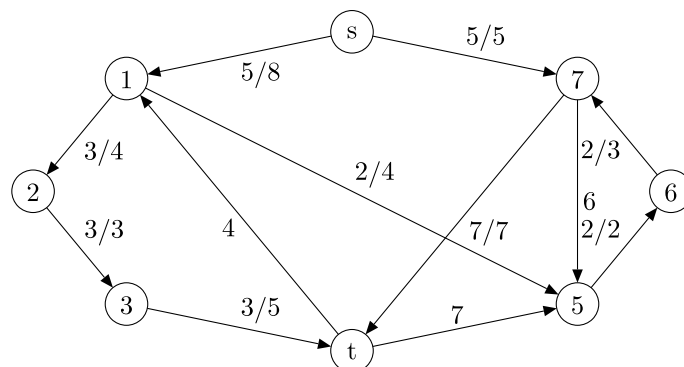
Aufgabe H3 (5+5 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk:



- Berechnen Sie einen maximalen Fluss und geben Sie ihn an. Wie groß ist sein Wert?
- Finden Sie zwei verschiedene minimale Schnitte und geben Sie beide an.

Lösungsvorschlag



Punkte: 5 Punkte für einen korrekten Fluss. Wenn man sieht, dass der Studierende das Prinzip verstanden hat, aber Flüchtigkeitsfehler gemacht hat, gibt es Teilpunkte. Punktabzug ist proportional zum gemachten Fehler.

Die beiden Schnitte: $S = \{s, 1, 2, 5\}$ und $S = \{s, 1, 2, 5, 6, 7\}$.

Punkte: 1 Punkt für einen Schnitt, 5 Punkte für beide.

Aufgabe H4 (10 Punkte)

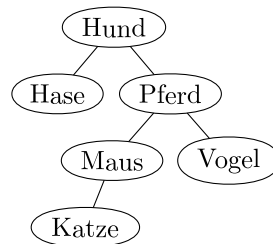
Konstruieren Sie einen optimalen Suchbaum bezüglich der lexikographischen Ordnung für folgende Suchwörter auf die mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten zugegriffen wird: Hase(0.35), Hund(0.25), Katze(0.05), Maus(0.10), Pferd(0.20), Vogel(0.05).

Erstellen Sie dazu außerdem die Tabellen für $w_{i,j}$ und $e_{i,j}$.

Lösungsvorschlag

$w_{i,j}$	Hase	Hund	Katze	Maus	Pferd	Vogel
Hase	0.35	0.60	0.65	0.75	0.95	1.00
Hund	0.00	0.25	0.30	0.40	0.60	0.65
Katze	0.00	0.00	0.05	0.15	0.35	0.40
Maus	0.00	0.00	0.00	0.10	0.30	0.35
Pferd	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.25
Vogel	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05

$e_{i,j}$	Hase	Hund	Katze	Maus	Pferd	Vogel
Hase	0.35(Hase)	0.85(Hase)	1.00(Hase)	1.30(Hund)	1.85(Hund)	2.00(Hund)
Hund	0.00	0.25(Hund)	0.35(Hund)	0.60(Hund)	1.15(Hund)	1.30(Maus)
Katze	0.00	0.00	0.05(Katze)	0.20(Maus)	0.55(Pferd)	0.65(Pferd)
Maus	0.00	0.00	0.00	0.10(Maus)	0.40(Pferd)	0.50(Pferd)
Pferd	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20(Pferd)	0.30(Pferd)
Vogel	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05(Vogel)



Punkte: 2 Punkte für $w_{i,j}$, 6 Punkte für $e_{i,j}$, 2 Punkte für Suchbaum. Folgefehler führen nicht zu Punktabzug.