

Lemma A

Falls f ein s - t -Fluß für $G = (V, E)$ ist, dann gilt:

- 1 $f(X, X) = 0$ für $X \subseteq V$
- 2 $f(X, Y) = -f(Y, X)$ für $X, Y \subseteq V$
- 3 $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$
- 4 $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$

Dieses Lemma ist sehr nützlich, um wichtige Eigenschaften über Flüsse abzuleiten.

Lemma A

Um Lemma A zu beweisen, dürfen wir nur die Eigenschaften eines s - t -Flusses verwenden, also Zulässigkeit, Symmetrie und Flußerhaltung.

Beweis für $f(X, X) = 0$:

$$\begin{aligned} f(X, X) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \left(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \right) = 0 \end{aligned}$$

Hier genügt die Symmetrie allein! (Rest als Übungsaufgabe.)

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Residualnetzwerke

„Netzwerk minus Fluß = Residualnetzwerk“

Definition

Gegeben ist ein Netzwerk $G = (V, E)$ und ein Fluß f . Das **Residualnetzwerk** $G_f = (V, E_f)$ zu G und f ist definiert vermöge

$$E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \},$$

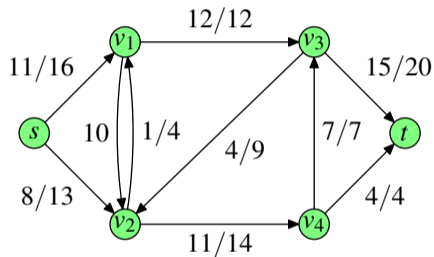
wobei

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v).$$

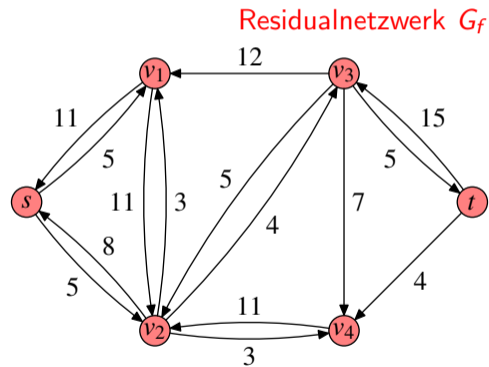
c_f ist die **Restkapazität**.

Das s - t -Netzwerk G_f hat die Kapazitäten c_f .

Beispiel



s - t -Netzwerk G mit Fluß f

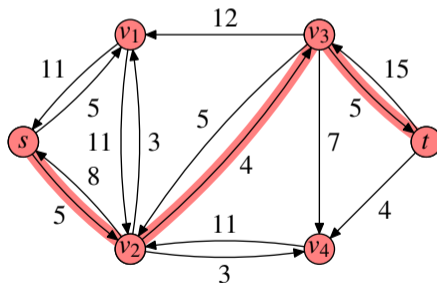


Augmentierende Pfade

Ein s - t -Pfad p in G_f heißt **augmentierender Pfad**.

$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ ist auf } p\}$ heißt **Restkapazität** von p .

Beispiel:



Die Restkapazität dieses Pfades ist 4.

Die Ford–Fulkerson–Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluß f zu 0

while es gibt einen augmentierenden Pfad p

do augmentiere f entlang p

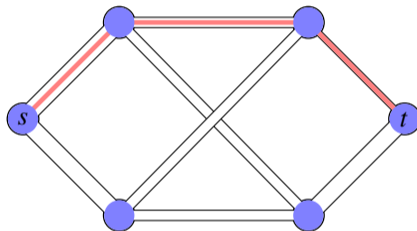
return f

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u, v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v, u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Augmentiere f entlang p : $f := f + f_p$

f_p ist ein Fluß in G_f

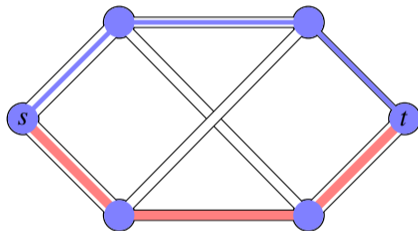
Die Ford–Fulkerson–Methode



Anfangs ist der Fluß 0.

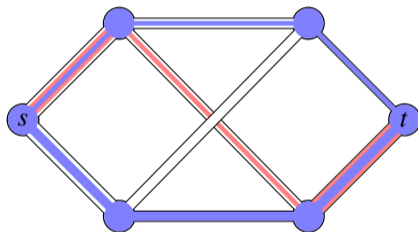
Der augmentierende Pfad ist rot eingezeichnet.

Die Ford–Fulkerson–Methode



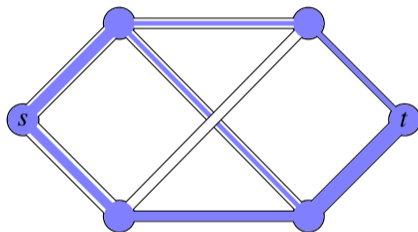
Der augmentierende Pfad hat Kapazität 5.

Die Ford–Fulkerson–Methode



Der augmentierende Pfad hat Kapazität 3.

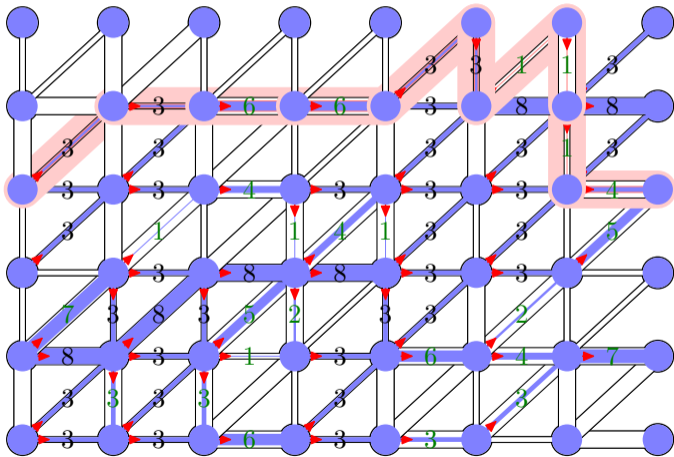
Die Ford–Fulkerson–Methode



Jetzt gibt es keinen augmentierenden Pfad mehr.

Der Fluß ist maximal.

Beispiel



Korrektheit

Lemma B

Sei $G = (V, E)$ ein s - t -Netzwerk und f ein Fluß in G .

Sei f' ein Fluß in G_f .

Dann ist $f + f'$ ein Fluß in G .

Konsequenz:

Die Ford–Fulkerson–Methode berechnet einen Fluß.

Beweis.

Wir müssen zeigen, daß $f + f'$ zulässig, symmetrisch und flußerhaltend ist. □

Beweis (Symmetrie)

$$\begin{aligned}(f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\ &= -f(v, u) - f'(v, u) \\ &= -(f(v, u) + f'(v, u)) \\ &= -(f + f')(v, u)\end{aligned}$$