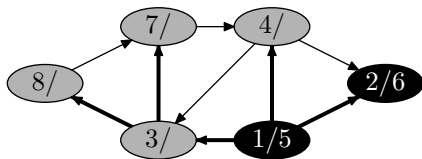


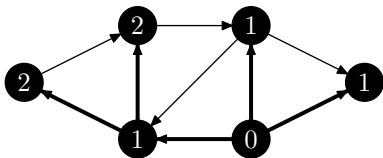
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

Breitensuche



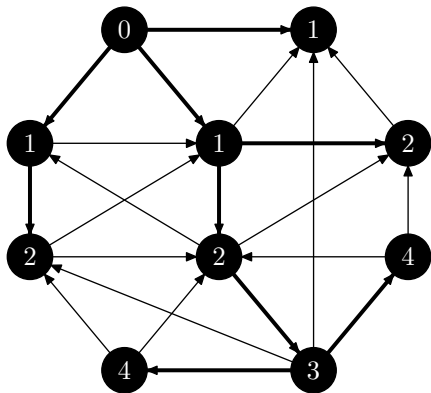
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche – Größeres Beispiel



```
public static <V> Map<V, V> BFS(Graph<V> G, V s) {  
    Map<V, V> pred = new HashMap<V, V>();  
    Map<V, Integer> color = new HashMap<V, Integer>();  
    for (V u : G.allNodes()) color.put(u, WHITE);  
    Queue<V> q = new Queue<V>();  
    q.enqueue(s); color.put(s, GRAY);  
    while (!q.isEmpty()) {  
        V u = q.dequeue();  
        for (V v : G.neighbors(u)) {  
            if (color.get(v) == WHITE) {  
                color.put(v, GRAY);  
                q.enqueue(v);  
                pred.put(v, u);  
            }  
        }  
        color.put(u, BLACK);  
    }  
    return pred;  
}
```

Breitensuche

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$.

Die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten und die zugehörigen Abstände können in $O(|V| + |E|)$ berechnet werden.

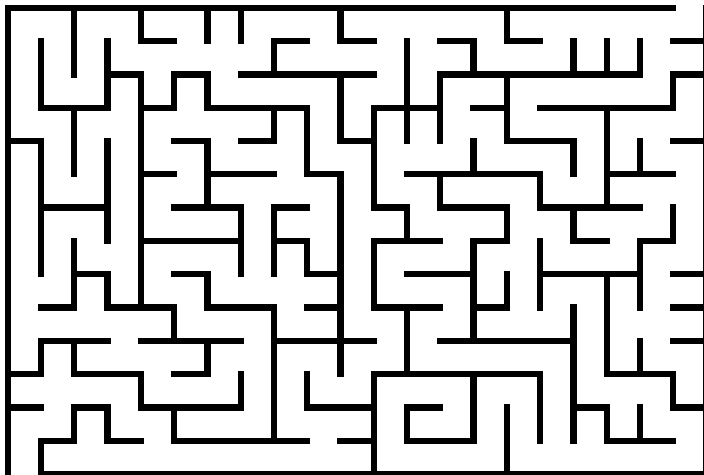
Beweis.

Wir verwenden Breitensuche.

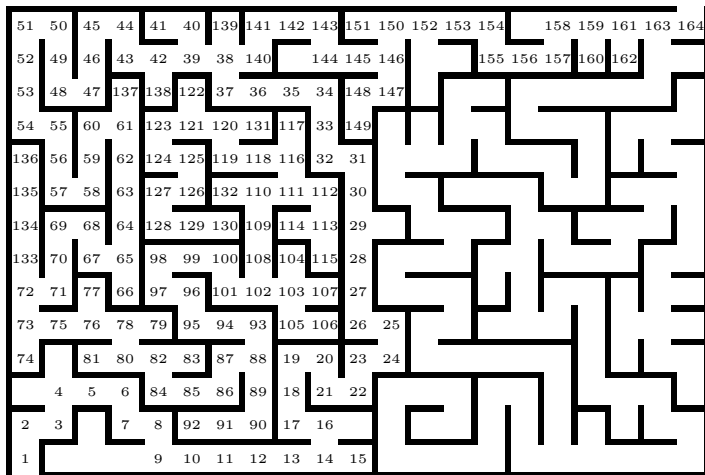
Die Laufzeit ist offensichtlich linear.

Der Korrektheitsbeweis sei hier weggelassen (etwas lang und technisch). □

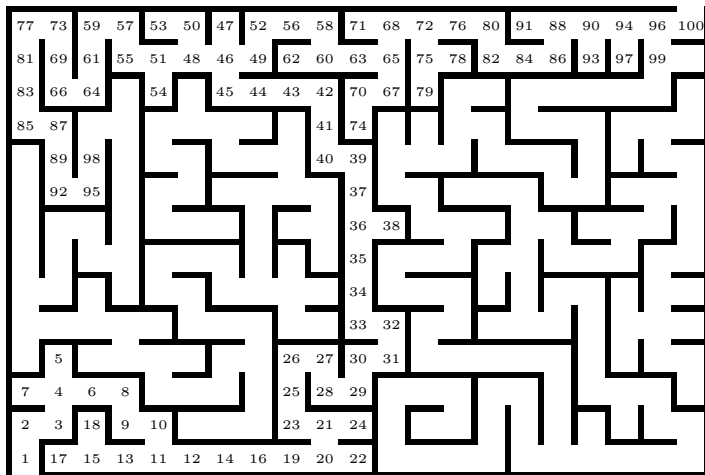
Beispiel



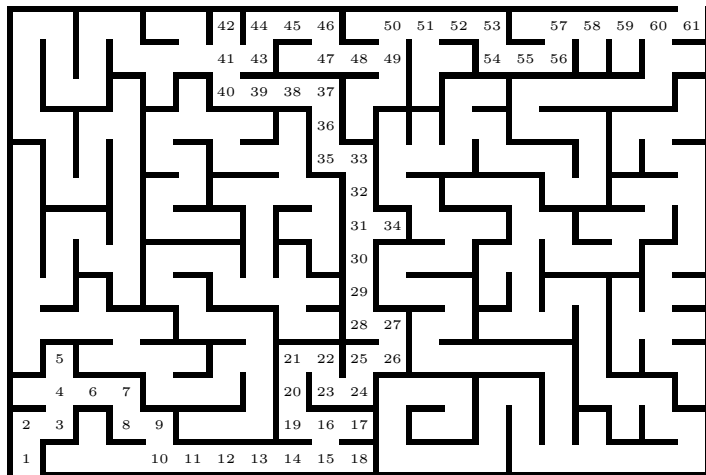
Beispiel: DFS



Beispiel: BFS



Beispiel: LC



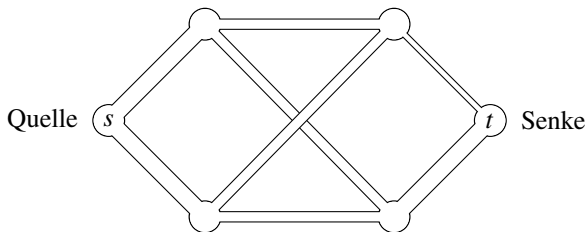
Übersicht

3 Graphalgorithmen

- Darstellung von Graphen
- Tiefensuche
- Starke Komponenten
- Topologisches Sortieren
- Kürzeste Pfade
- **Netzwerkalgorithmen**
- Minimale Spannbäume

Netzwerkfluß

Gegeben ist ein System von Wasserrohren:

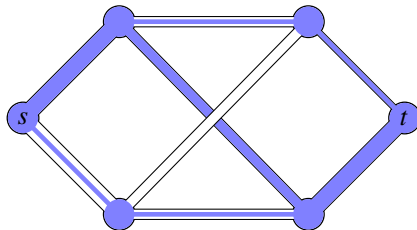


Die Kapazität jedes Rohres ist 3, 5 oder 8 l/s.

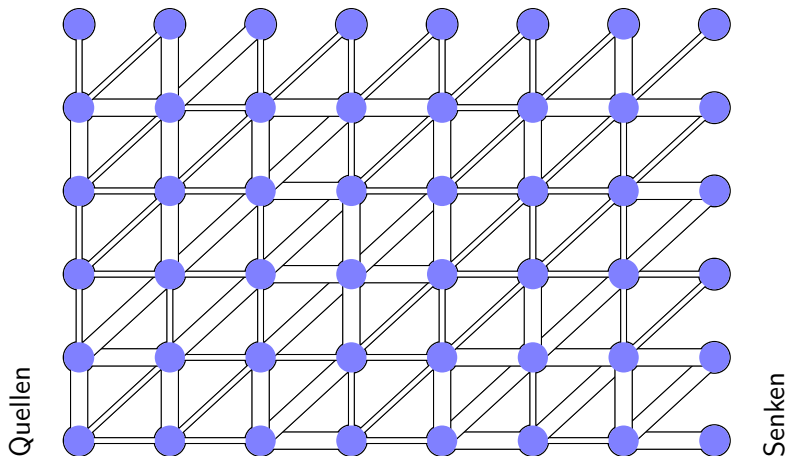
Frage: Wieviel Wasser kann von der Quelle zur Senke fließen?

Netzwerkfluß

Antwort: Maximal 11 l/s sind möglich.

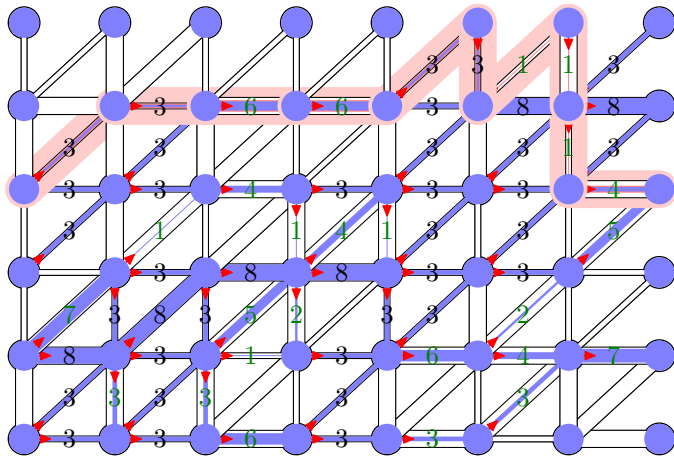


Netzwerkfluß – Aufgabe



Die Kapazitäten sind 3 und 8.

Netzwerkfluß – Lösung



Der maximale Fluß beträgt 30.

s - t -Netzwerke

Definition

Ein **s - t -Netzwerk** (flow network) ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, wobei

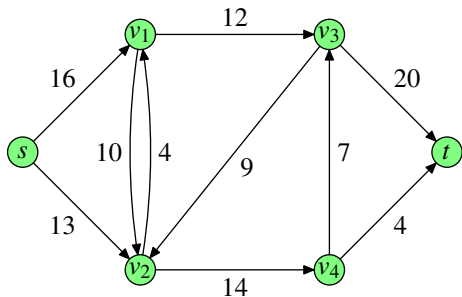
- 1 jede Kante $(u, v) \in E$ eine **Kapazität** $c(u, v) \geq 0$ hat,
- 2 es eine **Quelle** $s \in V$ und eine **Senke** $t \in V$ gibt.

Es ist bequem, anzunehmen daß jeder Knoten auf einem Pfad von s nach t liegt.

Falls $(u, v) \notin E$ setzen wir $c(u, v) = 0$.

Es kann Kanten (u, v) und (v, u) mit verschiedener Kapazität geben.

Beispiel eines s - t -Netzwerks



Die Kanten sind mit den Kapazitäten $c(u, v)$ beschriftet.

Flüsse

Definition

Ein **Fluß** ist eine Funktion $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, die Paare von Knoten auf reelle Zahlen abbildet und diese Bedingungen erfüllt:

- **Zulässigkeit:** Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) \leq c(u, v)$.
- **Symmetrie:** Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) = -f(v, u)$.
- **Flußerhaltung:** Für $u \in V - \{s, t\}$ gilt $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses ist definiert als $|f| = \sum_{u \in V} f(s, u)$.

Dies ist gerade der Gesamtfluß aus der Quelle heraus.

Maximale Flüsse

Das Problem des **maximalen Flusses**:

Gegeben: Ein s - t -Netzwerk.

Gesucht: Ein Fluß mit maximalem Wert.

Viele Anwendungen

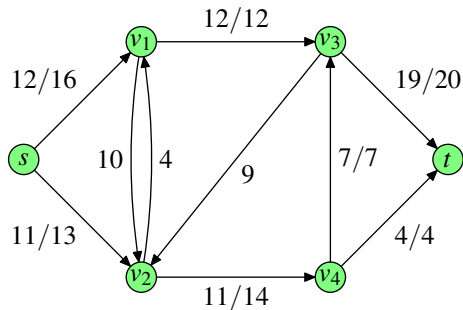
Beispiel: Wieviele Leitungen müssen zerstört sein, damit zwei Computer nicht mehr miteinander kommunizieren können.

Weiteres Beispiel: ISS-Problem



- Weltraumtouristen machen Angebote
- Sie benötigen spezielle Ausrüstung
- Ausrüstung kann mehrfach benutzt werden
- Wer soll mitgenommen werden?

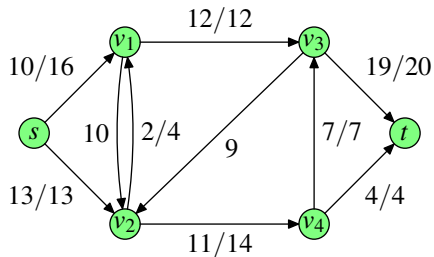
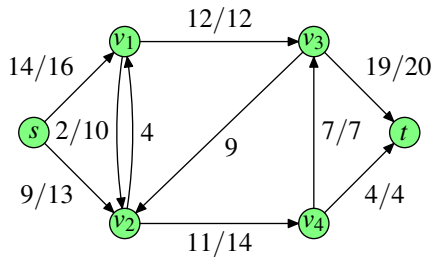
Was ist der maximale Fluß?



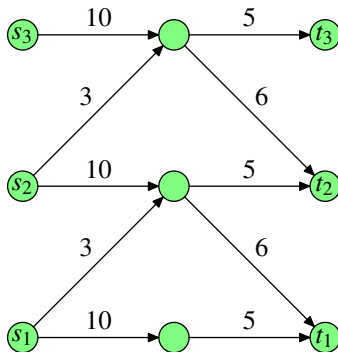
Der maximale Fluß ist 23.

Die Kanten sind mit $c(u, v)$ beschriftet oder mit $f(u, v)/c(u, v)$, falls $f(u, v) > 0$.

Andere optimale Lösungen

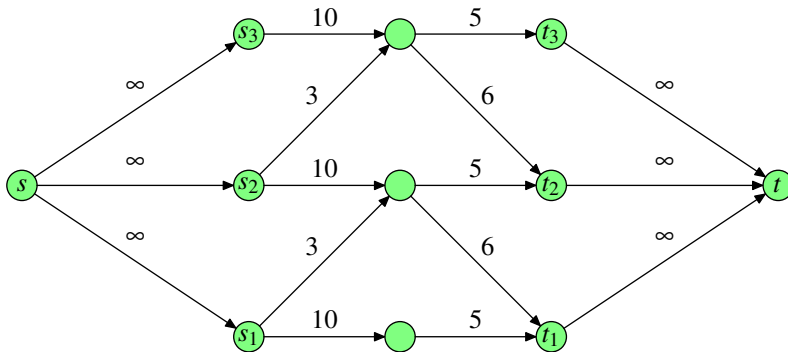


Mehrfache Quellen oder Senken



Mehrfache Quellen oder Senken sind eine Verallgemeinerung des Problem des maximalen Flusses.

Mehrfache Quellen oder Senken



→ Neue „Superquelle“ und „Supersenke“ hinzufügen.

Existenz des maximalen Flusses

Existiert stets der maximale Fluß

$$\max\{ |f| \mid f \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Fluß in } G \}?$$

Ja, denn die Menge aller Flüsse ist abgeschlossen im \mathbf{R}^m und sie ist nicht leer.

Die stetige Funktion, die einen Fluß auf ihren Wert abbildet, hat daher ein Maximum:

$$|f| = \sum_{u \in V} f(s, u) \text{ ist stetig!}$$

(Satz von Weierstrass)

Einige Notationen

Es ist bequem einige Abkürzungen zu verwenden:

- $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $X, Y \subseteq V$
- $f(x, Y) = \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $Y \subseteq V$
- $f(X, y) = \sum_{x \in X} f(x, y)$ für $X \subseteq V$
- $X - y$ statt $X - \{y\}$