Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2019
Prof. Dr. P. Rossmanith
S. Dollase, J. Dreier, H. Lotze

Datum: 20.6.2019

Übungsblatt 10

Aufgabe T35

Manche Paare von Städten bilden Partnerschaften mit anderen Städten (Aachen zum Beispiel mit Liège, Toledo und weiteren). Diese Beziehungen lassen sich gut durch einen Graphen modellieren.

Nun soll im *Internationalen Jahr der Städtefreundschaften* je eine Feier zwischen allen befreundeten Städtepaaren durchgeführt werden. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass alle Feiern dasselbe kosten. Eine Feier zwischen zwei Städten kann entweder von der einen oder der anderen Stadt finanziert werden. Jede Stadt hat ein Budget, welches besagt für wie viele Feiern sie Geld spenden kann. Dies soll stets eine ganze Zahl sein.

Ihr Problem ist es nun, einen Plan zu finden, der besagt welche Stadt für welche Feiern zahlen soll, ohne dass Budgets überschritten werden. Können Sie dies durch Lösen eines Flussproblems lösen?

Aufgabe T36

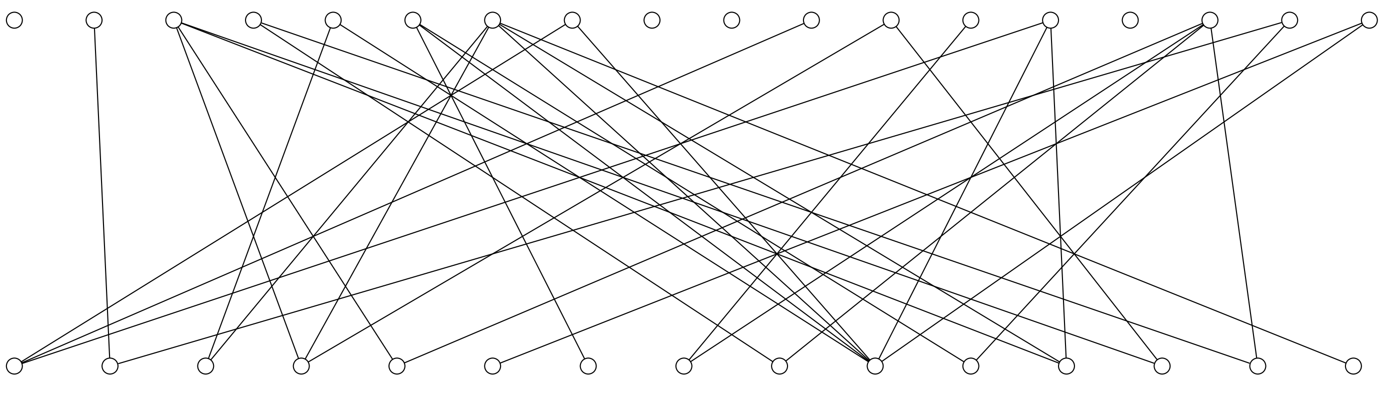
Die internationale Raumstation ISS steht auch Weltraumtouristen offen. Sie sollen nun entscheiden, welche Touristen Sie mitnehmen wollen, um möglichst viel Geld zu verdienen.

Gegeben sind Kandidaten $K_1, \dots, K_n$, welche jeweils bereit sind, $k_1, \dots, k_n$ US-Dollar zu zahlen. Allerdings sind sie anspruchsvoll und erwarten auf der ISS auch ein Unterhaltungsprogramm (der Erstbesucher Cameron wollte zum Beispiel einen Weltraumspaziergang machen). Zu diesem Zweck stehen eine Menge „Spielzeuge“ $Z_1, \dots, Z_m$ zur Verfügung. Bei der Mitnahme eines Spielzeugs zur ISS entstehen allerdings jeweils Kosten $z_1, \dots, z_m$. Der Kandidat K_i ist nur bereit zu zahlen, wenn die Spielzeuge $R_i \subseteq \{Z_1, \dots, Z_m\}$ mitgenommen werden.

Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der eine Menge von Kandidaten auswählt, um die Einnahmen (also die gezahlten Gebühren der Touristen minus die Kosten für die Spielzeuge) zu maximieren. Jedes Spielzeug muss nur einmal mitgenommen werden, selbst wenn mehrere es benutzen wollen.

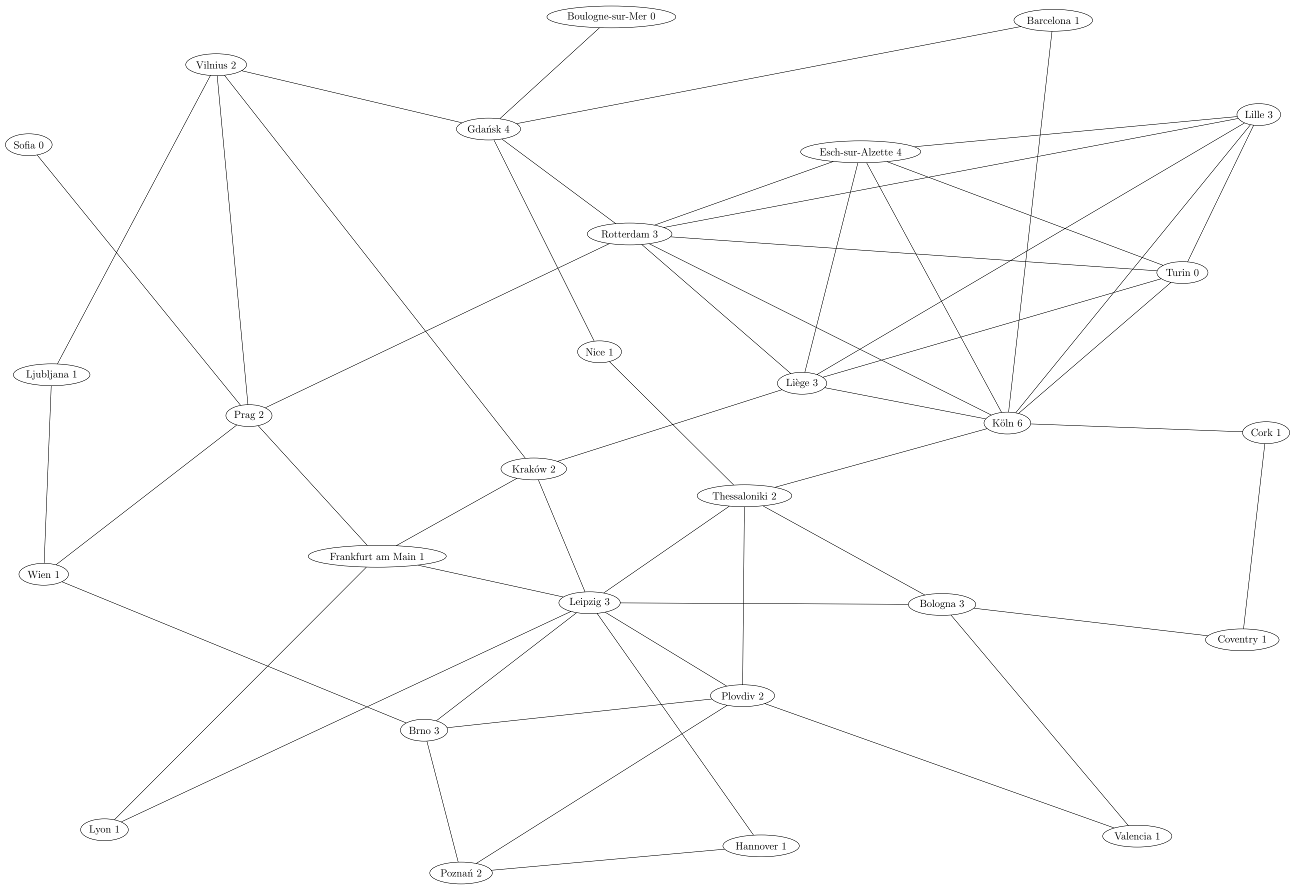
Aufgabe H28 (8 Punkte)

Finden Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität in diesem Graphen. Aus wie vielen Kanten besteht es?



Aufgabe H29 (10 Punkte)

Finden Sie einen Plan, analog zur Aufgabe oben, für das kleinere Städtepartnerschaftsmodell unten. Die Zahlen geben das Budget für jede Stadt wieder. Zeichnen Sie die gefundene Lösung ein, indem Sie für jede Kante markieren, welche der beiden Städte für diese Feier aufkommt.



Aufgabe H30 (12 Punkte)

Die Produktionsaufträge $J_1, J_2, \ldots, J_n$ eines Unternehmens benötigen verschiedene Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, wobei ein Auftrag auch mehrere Maschinen belegen kann. Ein Auftrag bringt natürlich einen gewissen Geldbetrag ein. Die Maschinen können entweder gekauft werden — diese Kosten entstehen dann nur einmal und jede weitere Nutzung ist Kostenfrei — oder gemietet werden. Letzteres kostet pro Auftrag einen gewissen Betrag (dieser Betrag variiert also von Auftrag zu Auftrag!). Die dritte Tabelle enthält die Mietkosten der Maschinen für die jeweiligen Aufträge, eine leere Zelle bedeutet, dass diese Maschine für diesen Auftrag nicht benötigt wird, ansonsten benötigt man *alle* anderen Maschinen für diesen Auftrag. Zum Beispiel kostet Auftrag J_1 auf der Maschine M_1 30 Geldeinheiten (vorausgesetzt, M_1 wurde nicht gekauft).

Für so ein Szenario mit gegebenen Aufträgen, Maschinen und Kosten soll eine gewinnmaximierende Menge von Aufträgen mit entsprechender Zuteilung von Maschinen berechnet werden. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Begründen Sie, wieso Ihr Verfahren korrekt funktioniert.

Benutzen Sie Ihr Verfahren, um eine optimale Lösung für das gegebene Szenario zu berechnen.

Auftrag	Zahlung
J_1	80
J_2	80
J_3	120

Maschine	Kaufpreis
M_1	60
M_2	80
M_3	100
M_4	30

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	30		50	
J_2		60	22	
J_3	30	30	30	30