Topologisches Sortieren – Anwendungen

Topologisches Sortieren kann viele Probleme lösen.

- In welcher Reihenfolge sollen Vorlesungen gehört werden?
- Wie baut man ein kompliziertes Gerät?
- Entwurf von Klassenhierarchien.
- Task scheduling.
- Tabellenkalkulation.
- Optimierung beim Compilieren.
- ...

Frage: Kann jede Halbordnung topologisch sortiert werden?

Topologisches Sortieren

Theorem

Jede endliche Halbordnung kann in eine (totale) Ordnung eingebettet werden.

Beweis.

Sei $\leq \subseteq M \times M$ eine endliche Halbordnung auf M.
Da M endlich ist, dann gibt es ein $x \in M$, so daß es kein $y \in M$ mit $y \neq x$ und $y \leq x$ gibt.
Wir können die Ordnung mit x als kleinstem Element beginnen und dann eine Ordnung von $M \setminus \{x\}$ anfügen.
Durch Induktion sieht man, daß dies eine (totale) Ordnung auf M ist. □

Frage: Was ist mit unendlichen Mengen?

Topologisches Sortieren

Theorem

Jede endliche Halbordnung kann in eine (totale) Ordnung eingebettet werden.

Beweis.

Sei $\leq \subseteq M \times M$ eine endliche Halbordnung auf M.
Da M endlich ist, dann gibt es ein $x \in M$, so daß es kein $y \in M$ mit $y \neq x$ und $y \leq x$ gibt.
Wir können die Ordnung mit x als kleinstem Element beginnen und dann eine Ordnung von $M \setminus \{x\}$ anfügen.
Durch Induktion sieht man, daß dies eine (totale) Ordnung auf M ist. □

Frage: Was ist mit unendlichen Mengen?

Topologisches Sortieren

Theorem

G sei ein DAG. Wenn wir die Knoten von G nach den finish times einer DFS umgekehrt anordnen, sind sie topologisch sortiert.

Beweis.

Es seien u und v Knoten von G mit $f(u) < f(v)$
Daher kommt u nach v in der konstruierten Ordnung.

Wir zeigen, daß es keine Kante von u nach v gibt:

Falls $d(v) < d(u)$ müßte es eine Rückwärtskante sein, die es nicht gibt (DAG).

Also $d(v) > f(u)$ und v blieb weiß bis zur finish time von u.

Nur möglich, wenn keine Kante von u nach v. □

Topologisches Sortieren

Theorem

G sei ein DAG. Wenn wir die Knoten von G nach den finish times einer DFS umgekehrt anordnen, sind sie topologisch sortiert.

Beweis.

Es seien u und v Knoten von G mit $f(u) < f(v)$
Daher kommt u nach v in der konstruierten Ordnung.

Wir zeigen, daß es keine Kante von u nach v gibt:

Falls $d(v) < d(u)$ müßte es eine Rückwärtskante sein, die es nicht gibt (DAG).

Also $d(v) > f(u)$ und v blieb weiß bis zur finish time von u.

Nur möglich, wenn keine Kante von u nach v. □

Topologisches Sortieren

Theorem

G sei ein DAG. Wenn wir die Knoten von G nach den finish times einer DFS umgekehrt anordnen, sind sie topologisch sortiert.

Beweis.

Es seien u und v Knoten von G mit $f(u) < f(v)$
Daher kommt u nach v in der konstruierten Ordnung.

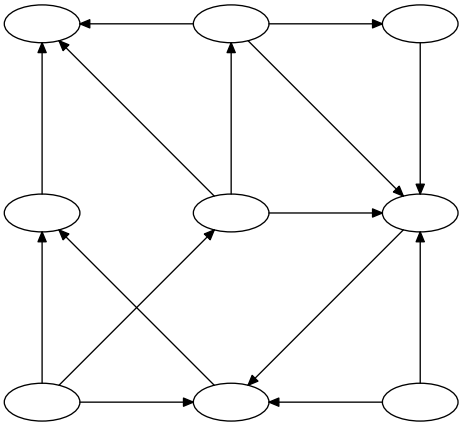
Wir zeigen, daß es keine Kante von u nach v gibt:

Falls $d(v) < d(u)$ müßte es eine Rückwärtskante sein, die es nicht gibt (DAG).

Also $d(v) > f(u)$ und v blieb weiß bis zur finish time von u.

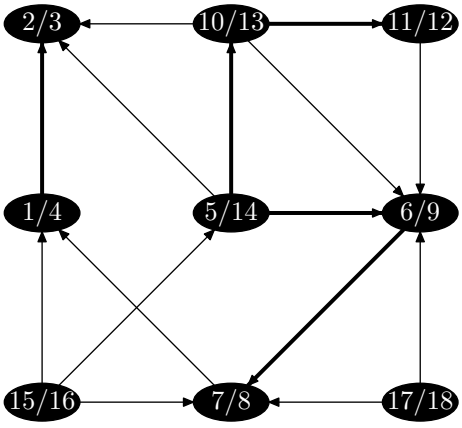
Nur möglich, wenn keine Kante von u nach v. □

Topologisches Sortieren – Beispiel



Topologisches Sortieren in $O(|V| + |E|)$ Schritten.

Topologisches Sortieren – Beispiel



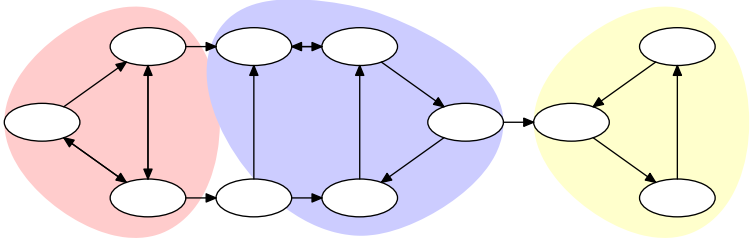
Topologisches Sortieren in $O(|V| + |E|)$ Schritten.

Übersicht

s-t Connectivity

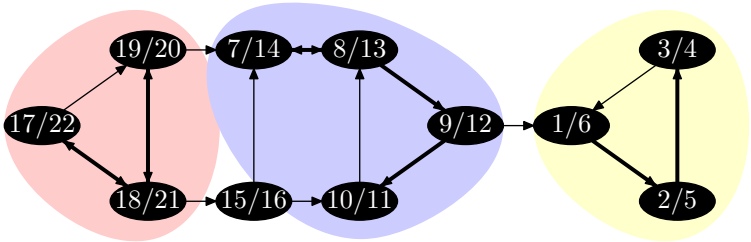
Gegeben: Knoten s und t in gerichtetem Graph

Frage: Ist t von s erreichbar (durch einen gerichteten Pfad)?



s-t Connectivity

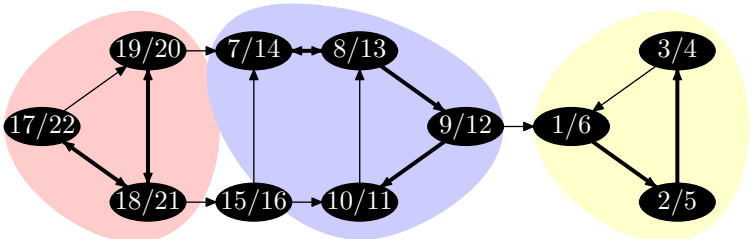
Führe eine DFS aus, starte bei s.



s-t Connectivity

Führe eine DFS aus, starte bei s.

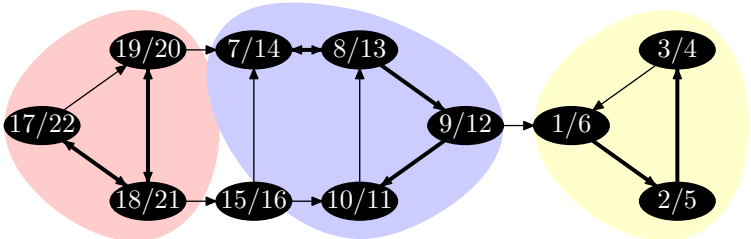
Pfad von s nach $t \iff f(t) < f(s)$.



s-t Connectivity

Führe eine DFS aus, starte bei s.

Pfad von s nach $t \iff f(t) < f(s)$.

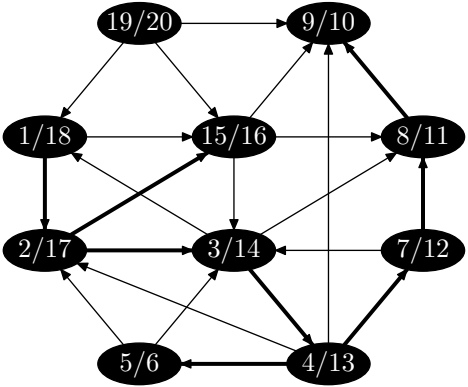


Beweis: Wenn s schwarz wird, sind alle von s erreichbaren Knoten schwarz.

s-t Connectivity

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und $s \in V$.
Wir können in linearer Zeit alle von s erreichbaren Knoten finden.



Single Source Shortest Paths

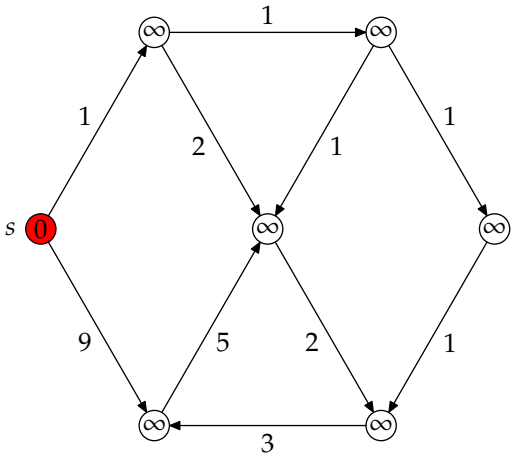
Gegeben ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $\mathit{length} : E \to \mathbf{Q}$ und ein Knoten $s \in V$, finde die kürzesten Wege von s zu allen Knoten.

- Wir lösen das Problem mit dynamischer Programmierung.
- Menge F von Knoten, deren Abstand bekannt ist.
- Anfangs ist $F = \{s\}$.
- F wird in jeder Iteration größer.
- Invariante: Kein Knoten $v \notin F$ hat kleineren Abstand zu s als jeder Knoten in F.

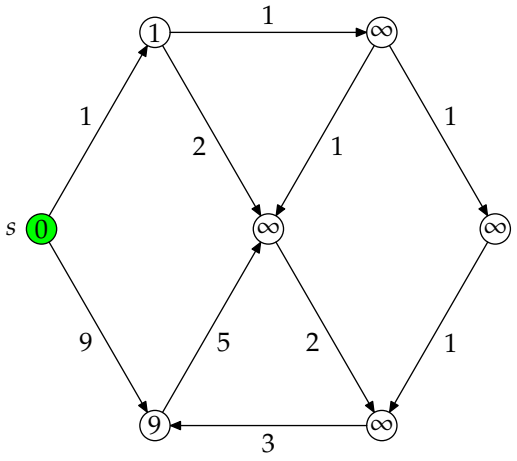
Single Source Shortest Paths

Gegeben ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $\mathit{length} : E \to \mathbf{Q}$ und ein Knoten $s \in V$, finde die kürzesten Wege von s zu allen Knoten.

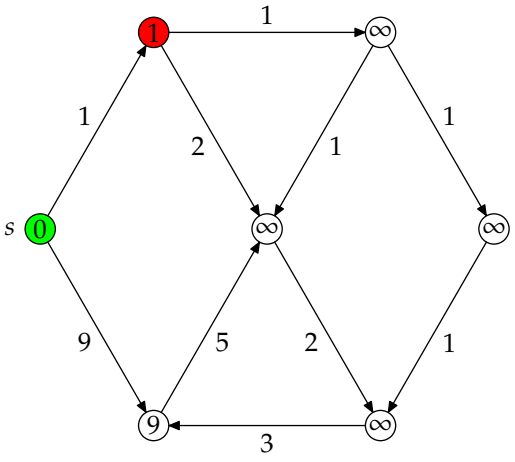
- Wir lösen das Problem mit dynamischer Programmierung.
- Menge F von Knoten, deren Abstand bekannt ist.
- Anfangs ist $F = \{s\}$.
- F wird in jeder Iteration größer.
- Invariante: Kein Knoten $v \notin F$ hat kleineren Abstand zu s als jeder Knoten in F.



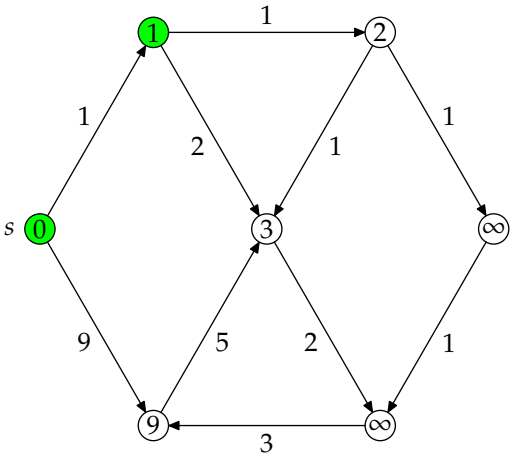
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



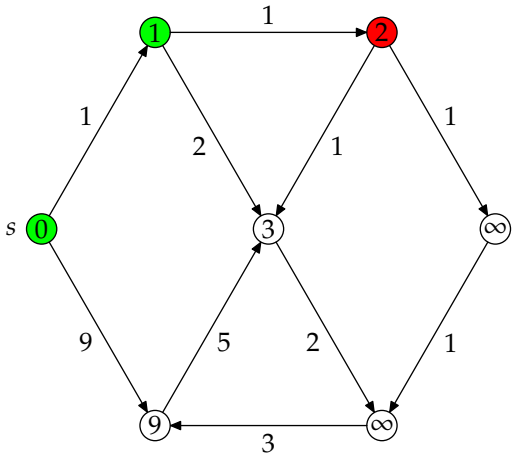
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



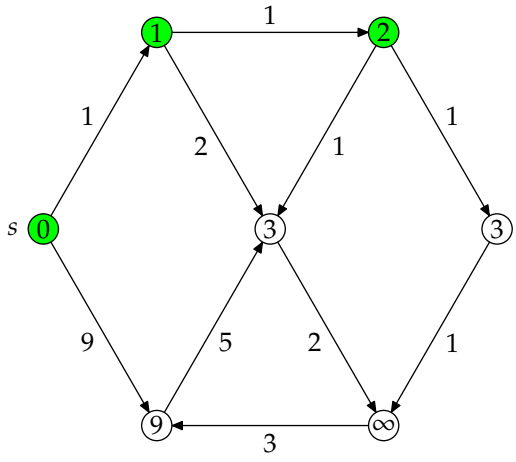
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



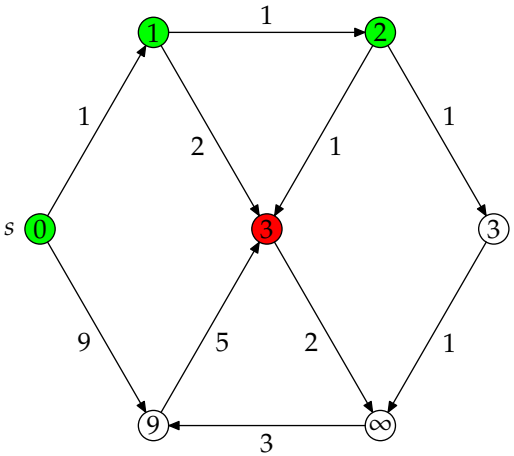
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



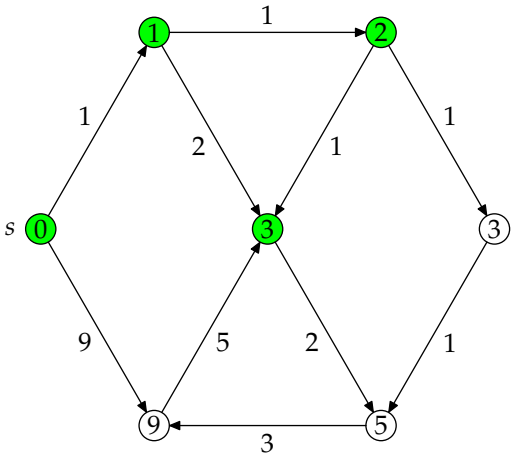
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



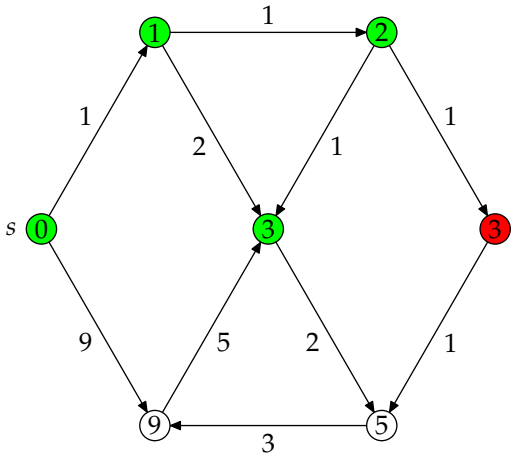
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



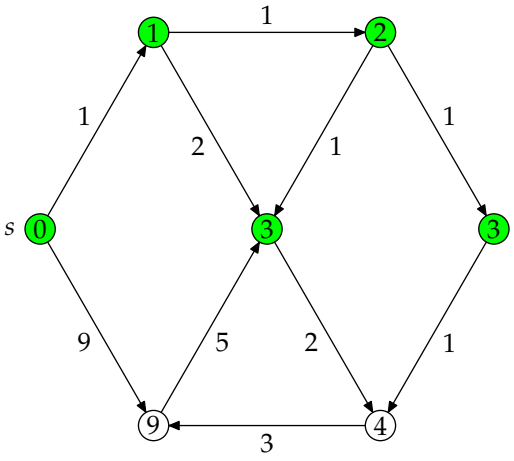
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



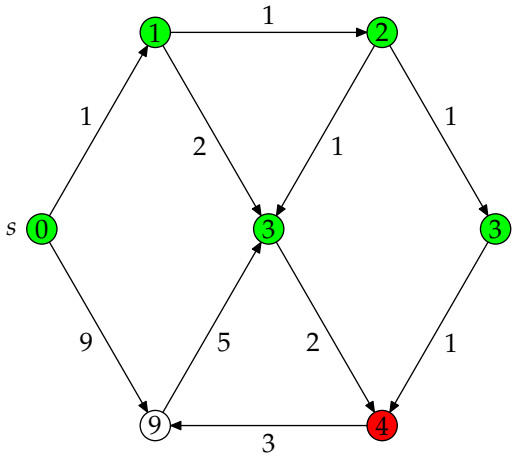
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



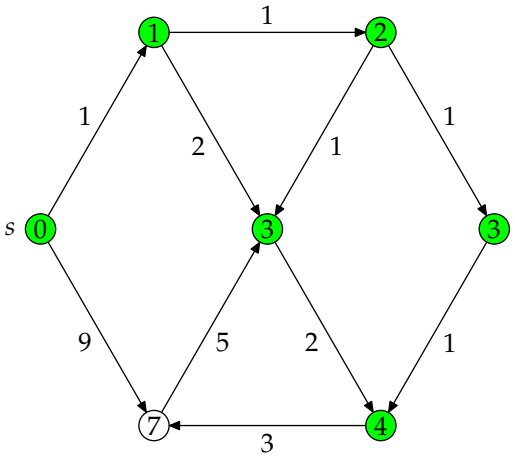
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



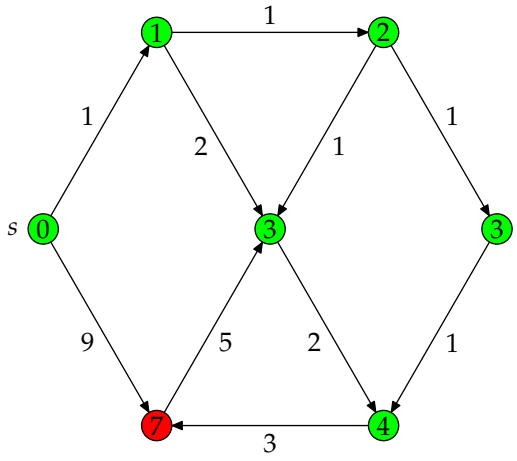
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



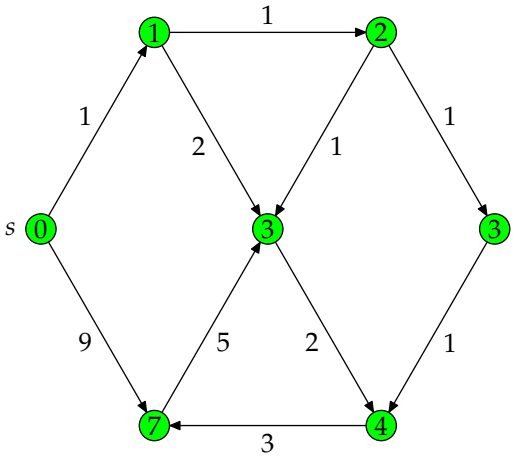
- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.



- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.

Korrektheit

Lemma

- *Jeder grüne Knoten enthält den Abstand von s.*
- *Jeder weiße Knoten enthält Abstand von s über grüne Knoten.*

Beweis.

Sei v einer weißer Knoten, dessen Beschriftung minimal ist.
Betrachte einen kürzesten Pfad von s nach v und den ersten weißen Knoten u auf diesem Pfad.
Es gilt $u = v$, da der Abstand von s zu u mindestens so groß ist wie der Abstand von s zu v.
Wenn ein Knoten grün wird, garantiert die Relaxation, daß die zweite Bedingung weiter gilt. □

Korrektheit

Lemma

- *Jeder grüne Knoten enthält den Abstand von s.*
- *Jeder weiße Knoten enthält Abstand von s über grüne Knoten.*

Beweis.

Sei v einer weißer Knoten, dessen Beschriftung minimal ist.
Betrachte einen kürzesten Pfad von s nach v und den ersten weißen Knoten u auf diesem Pfad.
Es gilt $u = v$, da der Abstand von s zu u mindestens so groß ist wie der Abstand von s zu v.
Wenn ein Knoten grün wird, garantiert die Relaxation, daß die zweite Bedingung weiter gilt. □

Der Algorithmus von Dijkstra

Algorithmus

```
procedure Dijkstra(s) :
Q := V − { s};
for v in Q do d[v] := ∞od;
d[s] := 0;
while Q ≠ ∅do
  choose v in Q with minimal d[v];
  Q := Q − { v};
  forall u adjacent to v do
    d[u] := min { d[u], d[v] + length(v, u)}
  od
od
```

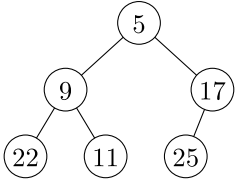
Wie implementieren wir Q?

Der Algorithmus von Dijkstra – Beispiel

Priority Queues (Prioritätswarteschlangen)

Operationen einer Prioritätswarteschlange Q:

1. Einfügen von x mit Gewicht w (insert)
2. Finden und Entfernen eines Elements mit minimalem Gewicht (extract-min)
3. Das Gewicht eines Elements x auf w verringern (decrease-weight)

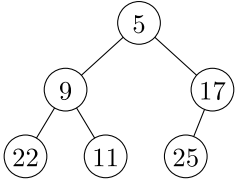


Heap: alle Operationen in $O(\log n)$ Schritten
(n ist die aktuelle Anzahl von Elementen im Heap)

Priority Queues (Prioritätswarteschlangen)

Operationen einer Prioritätswarteschlange Q:

1. Einfügen von x mit Gewicht w (insert)
2. Finden und Entfernen eines Elements mit minimalem Gewicht (extract-min)
3. Das Gewicht eines Elements x auf w verringern (decrease-weight)



Heap: alle Operationen in $O(\log n)$ Schritten
(n ist die aktuelle Anzahl von Elementen im Heap)

Algorithmus von Dijkstra – Laufzeit

Theorem

Der Algorithmus von Dijkstra berechnet die Abstände von s zu allen anderen Knoten in $O((|V| + |E|) \log |V|)$ Schritten.

Beweis.

Es werden $|V|$ Einfügeoperationen, $|V|$ extract-mins und $|E|$ decrease-keys ausgeführt. Verwenden wir einen Heap für die Prioritätswarteschlange, ergibt sich die verlangte Laufzeit. □

Ein Fibonacci-Heap benötigt für ein Einfügen und extract-min $O(\log n)$ und für decrease-key nur $O(1)$ amortisierte Zeit.

Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |E|)$

Algorithmus von Dijkstra – Laufzeit

Theorem

Der Algorithmus von Dijkstra berechnet die Abstände von s zu allen anderen Knoten in $O((|V| + |E|) \log |V|)$ Schritten.

Beweis.

Es werden $|V|$ Einfügeoperationen, $|V|$ extract-mins und $|E|$ decrease-keys ausgeführt. Verwenden wir einen Heap für die Prioritätswarteschlange, ergibt sich die verlangte Laufzeit. □

Ein Fibonacci-Heap benötigt für ein Einfügen und extract-min $O(\log n)$ und für decrease-key nur $O(1)$ amortisierte Zeit.

Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |E|)$

Algorithmus von Dijkstra – Laufzeit

Theorem

Der Algorithmus von Dijkstra berechnet die Abstände von s zu allen anderen Knoten in $O((|V| + |E|) \log |V|)$ Schritten.

Beweis.

Es werden $|V|$ Einfügeoperationen, $|V|$ extract-mins und $|E|$ decrease-keys ausgeführt. Verwenden wir einen Heap für die Prioritätswarteschlange, ergibt sich die verlangte Laufzeit. □

Ein Fibonacci-Heap benötigt für ein Einfügen und extract-min $O(\log n)$ und für decrease-key nur $O(1)$ amortisierte Zeit.

Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |E|)$

Java

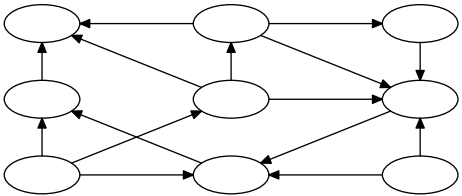
```
public static⟨V extends Comparable⟨V⟩⟩ Map⟨V, Double⟩
dijkstra(Graph⟨V⟩ G, V s, Map⟨Edge⟨V⟩, Double⟩ length, Map⟨V, V⟩ pred) {
  Map⟨V, Double⟩ dist = new HashMap⟨V, Double⟩();
  PriorityQueue⟨V, Double⟩ queue = new SplayPriorityQueue⟨V, Double⟩();
  for(V u : G.allNodes()) dist.put(u, Double.MAX_VALUE);
  dist.put(s, 0.0); queue.insert(s, 0.0);
  while(!queue.isEmpty()) {
    V u = queue.extractMin();
    for(V v : G.neighbors(u)) {
      Double l = length.get(G.edge(u, v));
      if(l == null) continue;
      double d = dist.get(u) + l;
      if(d < dist.get(v)) {
        queue.decreaseKey(v, d); dist.put(v, d); if(pred ≠ null) pred.put(v, u); }
    }
  }
  return dist;
}
```

Spezialfall DAG

Können wir kürzeste Pfade in DAGs schneller finden?

Theorem

Kürzeste Pfade von einem Knoten s in einem DAG können in linearer Zeit gefunden werden.

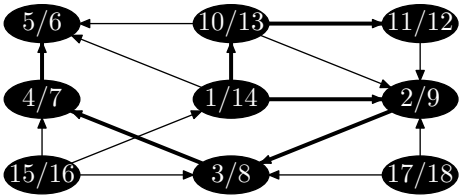


Spezialfall DAG

Können wir kürzeste Pfade in DAGs schneller finden?

Theorem

Kürzeste Pfade von einem Knoten s in einem DAG können in linearer Zeit gefunden werden.



Spezialfall DAG

Können wir kürzeste Pfade in DAGs schneller finden?

Theorem

Kürzeste Pfade von einem Knoten s in einem DAG können in linearer Zeit gefunden werden.

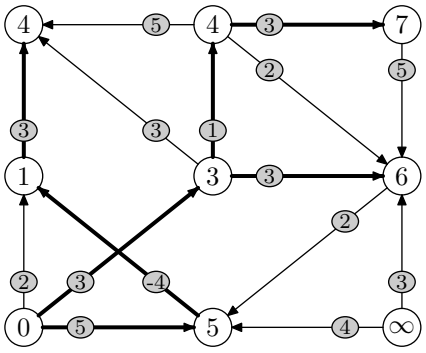
Beweis.

Relaxiere Knoten in topologischer Reihenfolge.

Laufzeit: $O(|V| + |E|)$.
Korrektheit: Jeder Knoten, der relaxiert, kennt zu diesem Zeitpunkt seinen echten Abstand. □

Frage: Sind negative Gewichte hier erlaubt?

Kürzeste Wege mit negativen Kantengewichten



Dijkstra funktioniert nicht mit negativen Kantengewichten.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Idee:

- Relaxiere alle Kanten
- Wiederhole dies, bis keine Änderung

Warum korrekt?

Induktion über die Länge eines kürzesten Pfads.
(Also genügen n Wiederholungen)

Was passiert bei Kreisen mit negativem Gewicht?

$\rightarrow$ Keine Terminierung.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Idee:

- Relaxiere alle Kanten
- Wiederhole dies, bis keine Änderung

Warum korrekt?

Induktion über die Länge eines kürzesten Pfads.
(Also genügen n Wiederholungen)

Was passiert bei Kreisen mit negativem Gewicht?

$\rightarrow$ Keine Terminierung.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Idee:

- Relaxiere alle Kanten
- Wiederhole dies, bis keine Änderung

Warum korrekt?

Induktion über die Länge eines kürzesten Pfads.
(Also genügen n Wiederholungen)

Was passiert bei Kreisen mit negativem Gewicht?

$\rightarrow$ Keine Terminierung.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Algorithmus

```
function Bellman − Ford(s) boolean :
for v in V do d[v] := ∞od;
d[s] := 0;
for i = 1 to|V| − 1 do
  forall(v, u) in E do
    d[u] := min { d[u], d[v] + length(v, u)}
  od
od;
forall(v, u) in E do
  if d[u] > d[v] + length(v, u) then return false fi
od;
return true
```

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $E \to \mathbf{R}$ und ein Knoten $s \in V$.
Wir können in $O(|V| \cdot |E|)$ feststellen, ob ein Kreis mit negativem Gewicht existiert, und falls nicht, die kürzesten Wege von s zu allen Knoten berechnen.

Beweis.

Wir haben die Korrektheit bereits nachgewiesen.
Zur Laufzeit: Jeder Knoten wird $|V|$ mal relaxiert, also wird auch jede Kante $|V|$ mal relaxiert (in konstanter Zeit). □

Der Algorithmus von Bellman und Ford

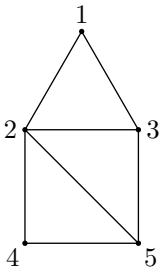
Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $E \to \mathbf{R}$ und ein Knoten $s \in V$.
Wir können in $O(|V| \cdot |E|)$ feststellen, ob ein Kreis mit negativem Gewicht existiert, und falls nicht, die kürzesten Wege von s zu allen Knoten berechnen.

Beweis.

Wir haben die Korrektheit bereits nachgewiesen.
Zur Laufzeit: Jeder Knoten wird $|V|$ mal relaxiert, also wird auch jede Kante $|V|$ mal relaxiert (in konstanter Zeit). □

Rekapitulation: Darstellung von Graphen



Adjazenzliste

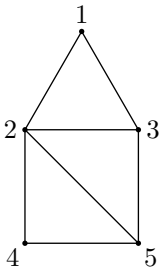
1	2, 3
2	1, 3, 4, 5
3	1, 2, 5
4	2, 5
5	2, 3, 4

Alle bisherigen Algorithmen:

Adjazenzliste gute Darstellung

Kritische Operation: Alle ausgehenden Kanten besuchen.

Rekapitulation: Darstellung von Graphen



Adjazenzliste

1	2, 3
2	1, 3, 4, 5
3	1, 2, 5
4	2, 5
5	2, 3, 4

Alle bisherigen Algorithmen:

Adjazenzliste gute Darstellung

Kritische Operation: Alle ausgehenden Kanten besuchen.

All Pairs Shortest Paths

Eingabe: Gerichteter Graph mit Kantengewichten

Ausgabe: Abstände und kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren

Laufzeit $O((|V|^2 + |V| \cdot |E|) \log |V|)$ mit Dijkstra.

$\rightarrow$ Wende Dijkstra auf jeden Knoten an.

All Pairs Shortest Paths

Eingabe: Gerichteter Graph mit Kantengewichten

Ausgabe: Abstände und kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren

Laufzeit $O((|V|^2 + |V| \cdot |E|) \log |V|)$ mit Dijkstra.

$\rightarrow$ Wende Dijkstra auf jeden Knoten an.

Algorithmus von Floyd

Algorithmus

```
procedure Floyd1 :
for i = 1, ..., n do
  for j = 1, ..., n do d[i, j, 0] := length[i, j] od
od;
for k = 1, ..., n do
  for i = 1, ..., n do
    for j = 1, ..., n do
      d[i, j, k] := min { d[i, j, k − 1], d[i, k, k − 1] + d[k, j, k − 1]}
    od
  od
od
```

Der Abstand von i nach j ist in $d[i, j, n]$ zu finden.

Theorem

Die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ können in $O(|V|^3)$ Schritten gefunden werden.

Beweis.

Per Induktion: $d[i, j, k]$ enthält die Länge des kürzesten Pfades von i nach j, wenn nur $1, \ldots, k$ als Zwischenstationen erlaubt sind.
Dann enthält $d[i, j, n]$ den wirklichen Abstand. □

Theorem

Die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ können in $O(|V|^3)$ Schritten gefunden werden.

Beweis.

Per Induktion: $d[i, j, k]$ enthält die Länge des kürzesten Pfades von i nach j, wenn nur $1, \ldots, k$ als Zwischenstationen erlaubt sind.
Dann enthält $d[i, j, n]$ den wirklichen Abstand. □

Algorithmus von Floyd

Einfachere Version:

Algorithmus

```
procedure Floyd :
for i = 1, ..., n do
  for j = 1, ..., n do d[i, j] := length[i, j] od
od;
for k = 1, ..., n do
  for i = 1, ..., n do
    for j = 1, ..., n do
      d[i, j] := min { d[i, j], d[i, k] + d[k, j]}
    od
  od
od
```

Spezialfall: Transitive Hülle – Algorithmus von Warshall

Frage: Zwischen welchen Knotenpaaren gibt es einen Weg?

Algorithmus

```
procedure Warshall :
for i = 1, ..., n do
  for j = 1, ..., n do D[i,j] := A[i,j] od
od;
for k = 1, ..., n do
  for i = 1, ..., n do
    for j = 1, ..., n do
      D[i,j] := D[i,j] || D[i,k] && D[k,j]
    od
  od
od
```

Transitive Hülle

Theorem

Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

1. Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
2. Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
3. Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
4. Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.

□

Transitive Hülle

Theorem

Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

1. Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
2. Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
3. Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
4. Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.

□

Transitive Hülle

Theorem

Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

1. Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
2. Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
3. Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
4. Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.

□

Transitive Hülle

Theorem

Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

1. Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
2. Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
3. Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
4. Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.

□

Transitive Hülle

Theorem

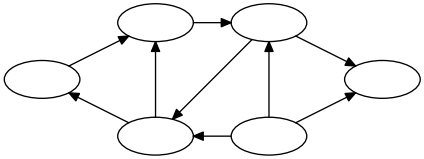
Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

1. Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
2. Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
3. Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
4. Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.

□

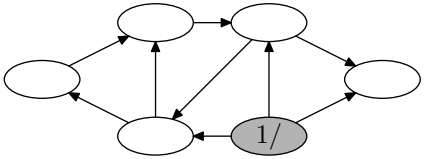
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

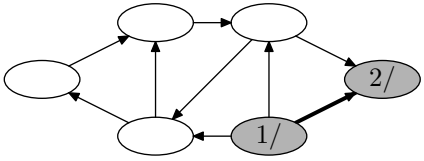
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

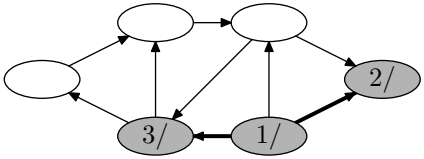
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

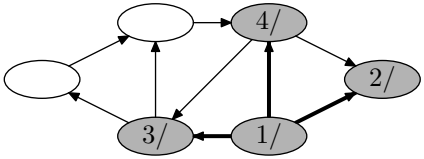
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

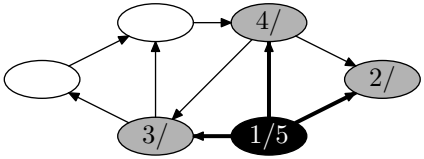
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

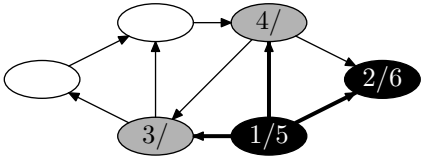
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

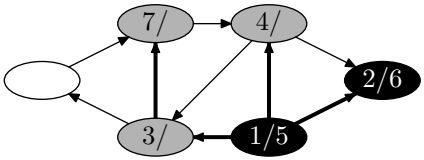
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

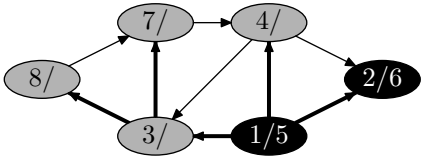
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

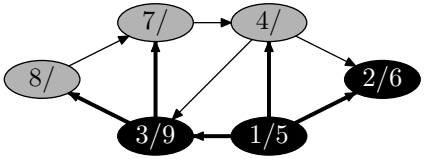
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

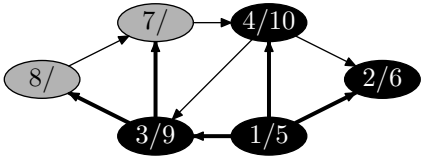
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

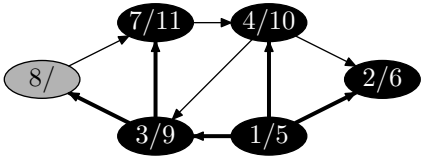
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

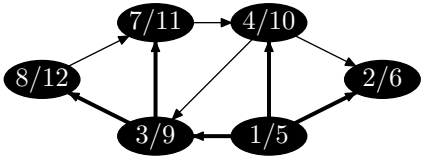
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

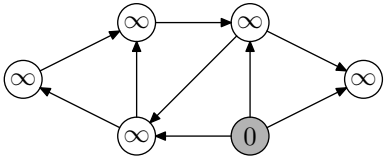
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

Breitensuche



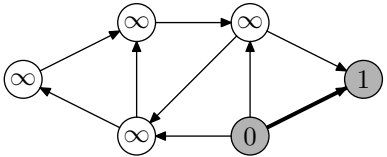
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



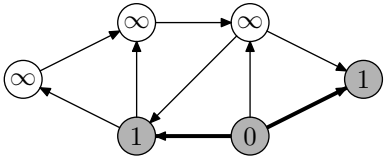
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



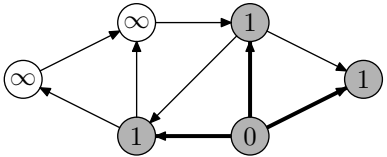
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



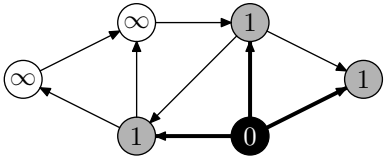
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



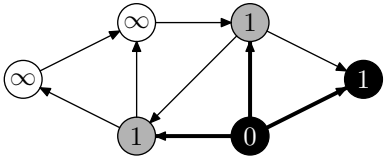
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



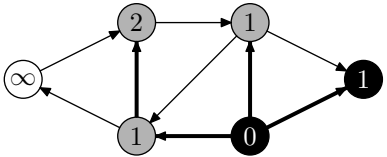
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



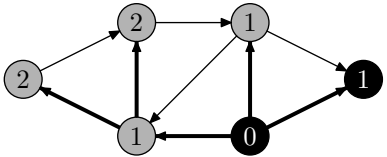
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



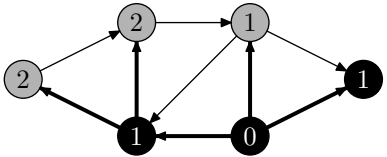
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



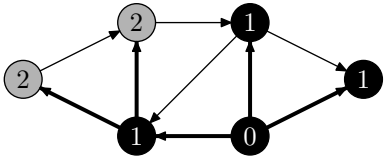
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



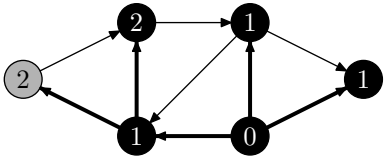
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



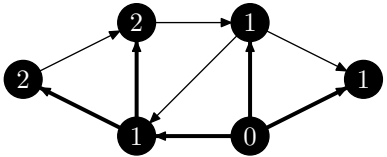
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche



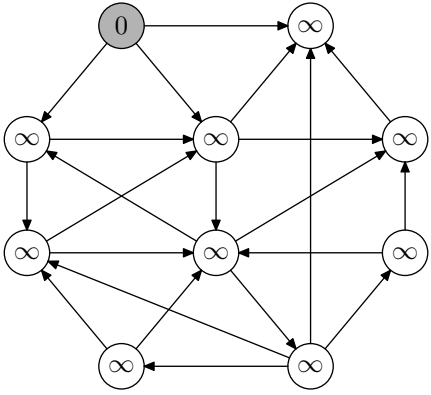
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

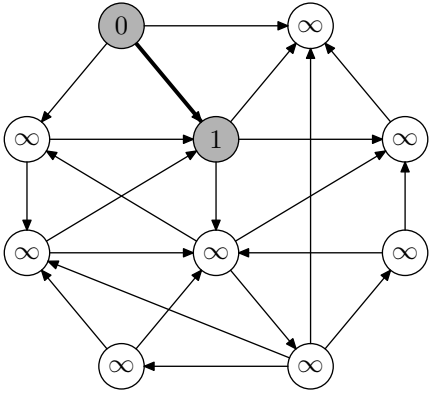
Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

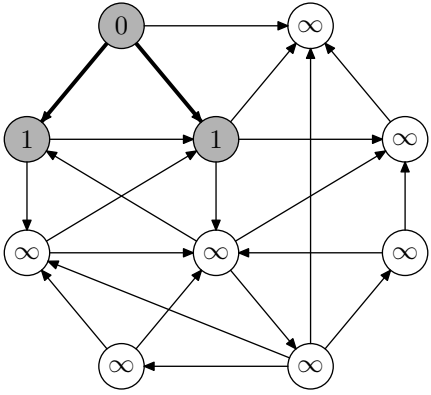
Breitensuche – Größeres Beispiel



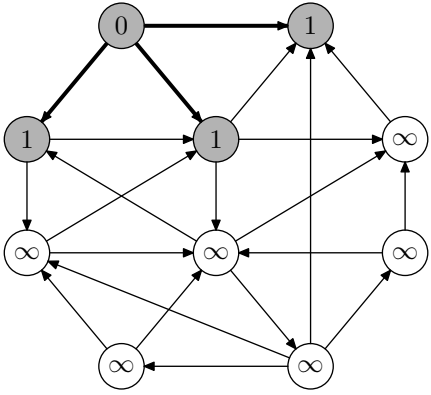
Breitensuche – Größeres Beispiel



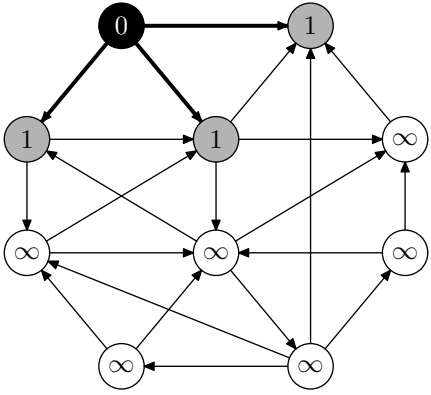
Breitensuche – Größeres Beispiel



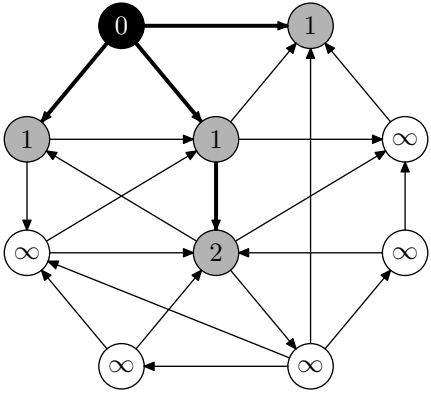
Breitensuche – Größeres Beispiel



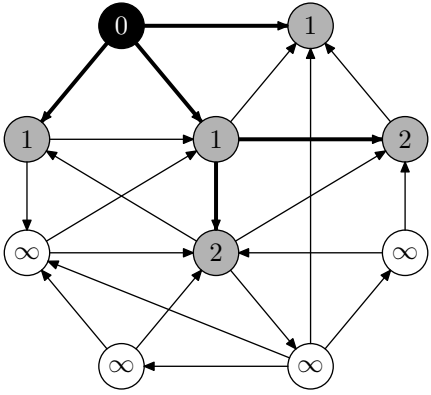
Breitensuche – Größeres Beispiel



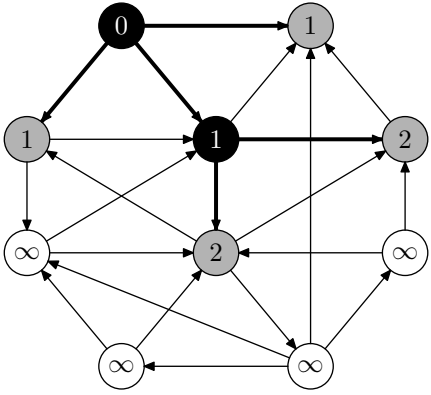
Breitensuche – Größeres Beispiel



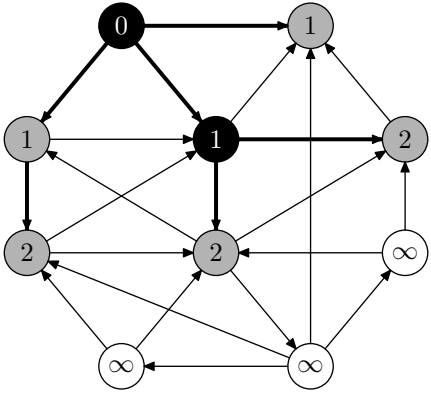
Breitensuche – Größeres Beispiel



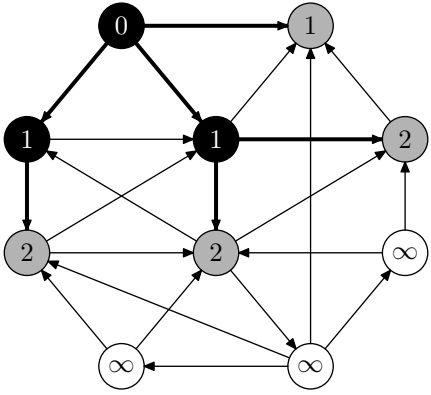
Breitensuche – Größeres Beispiel



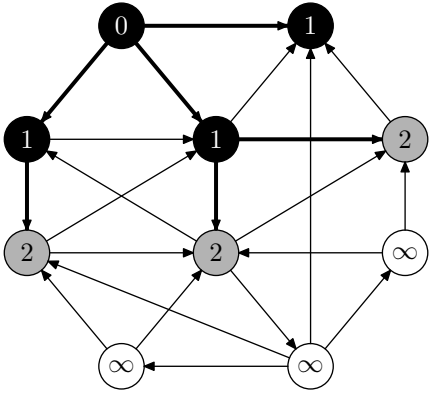
Breitensuche – Größeres Beispiel



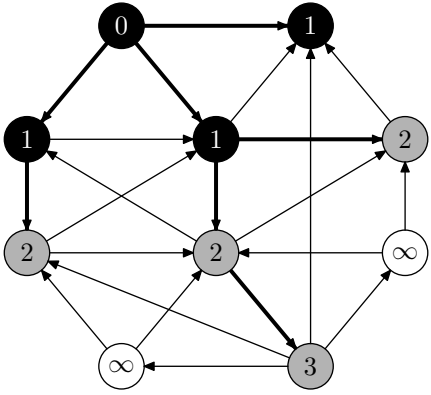
Breitensuche – Größeres Beispiel



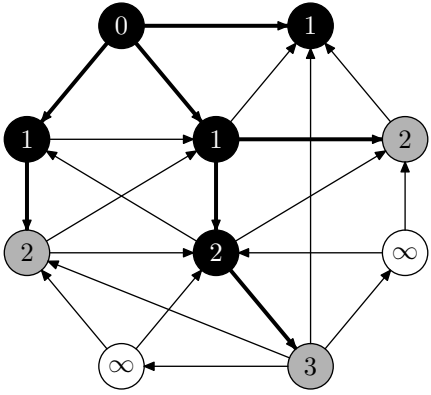
Breitensuche – Größeres Beispiel



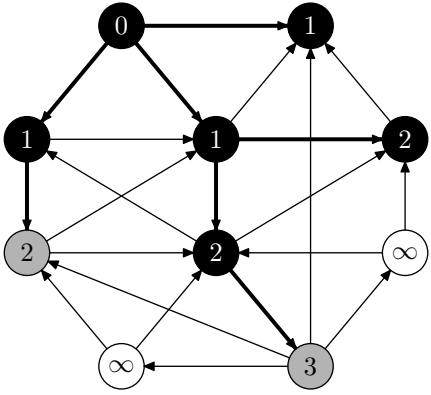
Breitensuche – Größeres Beispiel



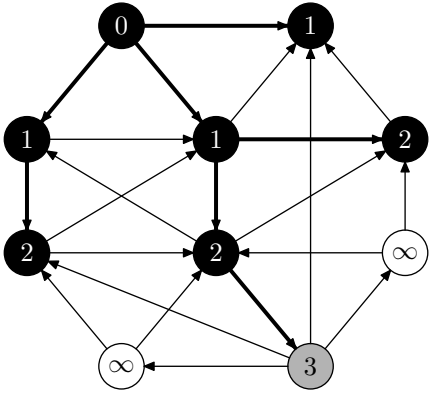
Breitensuche – Größeres Beispiel



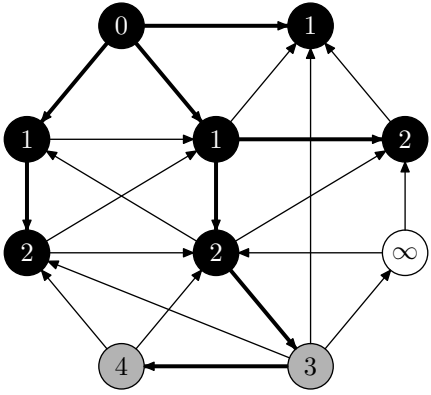
Breitensuche – Größeres Beispiel



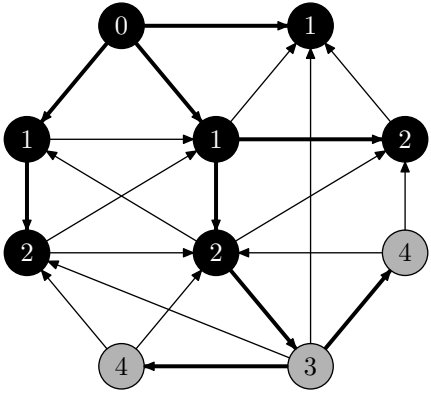
Breitensuche – Größeres Beispiel



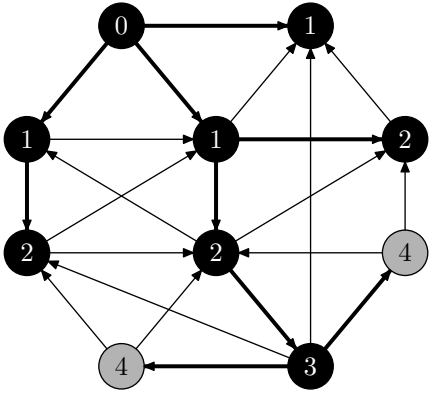
Breitensuche – Größeres Beispiel



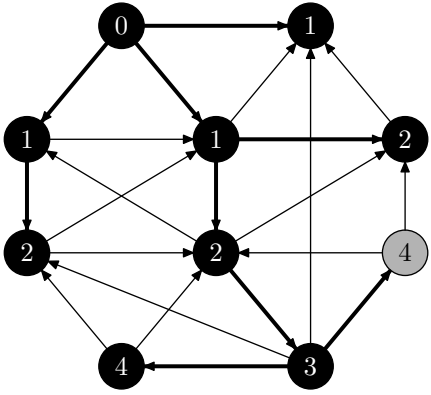
Breitensuche – Größeres Beispiel



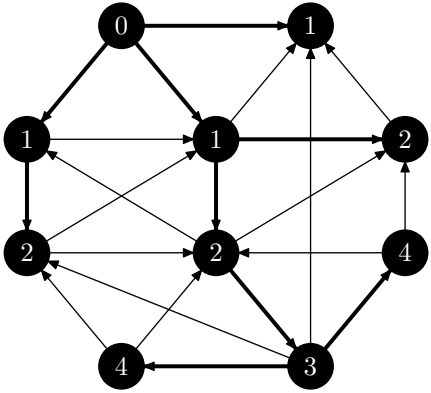
Breitensuche – Größeres Beispiel



Breitensuche – Größeres Beispiel



Breitensuche – Größeres Beispiel



Java

```
public static⟨V⟩ Map⟨V, V⟩ BFS(Graph⟨V⟩ G, V s) {
  Map⟨V, V⟩ pred = new HashMap⟨V, V⟩();
  Map⟨V, Integer⟩ color = new HashMap⟨V, Integer⟩();
  for(V u : G.allNodes()) color.put(u, WHITE);
  Queue⟨V⟩ q = new Queue⟨V⟩();
  q.enqueue(s); color.put(s, GRAY);
  while(!q.isempty()) {
    V u = q.dequeue();
    for(V v : G.neighbors(u)) {
      if(color.get(v) == WHITE) {
        color.put(v, GRAY);
        q.enqueue(v);
        pred.put(v, u);
      }
    }
    color.put(u, BLACK);
  }
  return pred;
}
```

Breitensuche

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$.
Die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten und die zugehörigen Abstände können in $O(|V| + |E|)$ berechnet werden.

Beweis.

Wir verwenden Breitensuche.
Die Laufzeit ist offensichtlich linear.

Der Korrektheitsbeweis sei hier weggelassen (etwas lang und technisch). □

Breitensuche

Theorem

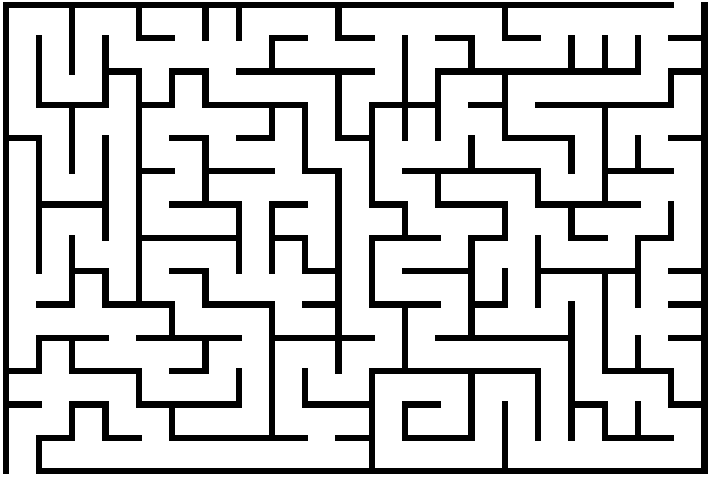
Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$.
Die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten und die zugehörigen Abstände können in $O(|V| + |E|)$ berechnet werden.

Beweis.

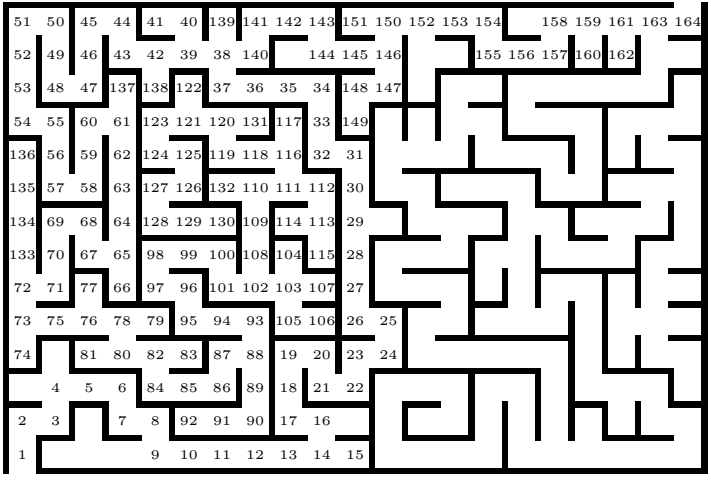
Wir verwenden Breitensuche.
Die Laufzeit ist offensichtlich linear.

Der Korrektheitsbeweis sei hier weggelassen (etwas lang und technisch). □

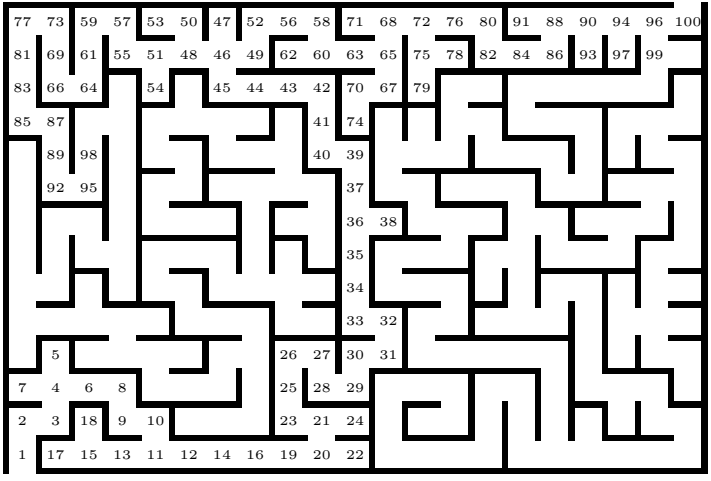
Beispiel



Beispiel: DFS



Beispiel: BFS



Beispiel: LC