Einige Notationen

Es ist bequem einige Abkürzungen zu verwenden:

- $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $X, Y \subseteq V$
- $f(x, Y) = \sum_{y \in Y} f(x, y)$ für $Y \subseteq V$
- $f(X, y) = \sum_{x \in X} f(x, y)$ für $X \subseteq V$
- $X - y$ statt $X - \{y\}$

Lemma A

Falls f ein s-t-Fluß für $G = (V, E)$ ist, dann gilt:

1. $f(X, X) = 0$ für $X \subseteq V$
2. $f(X, Y) = -f(Y, X)$ für $X, Y \subseteq V$
3. $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$
4. $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$ für $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$

Dieses Lemma ist sehr nützlich, um wichtige Eigenschaften über Flüsse abzuleiten.

Lemma A

Um Lemma A zu beweisen, dürfen wir nur die Eigenschaften eines s-t-Flusses verwenden, also Zulässigkeit, Symmetrie und Flußerhaltung.
Beweis für $f(X, X) = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \Big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \Big) = 0
\end{aligned}
$$

Hier genügt die Symmetrie allein! (Rest als Übungsaufgabe.)

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned}
f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\
&= -f(V - s, V) \\
&= f(V, V - s) \\
&= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\
&= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung}
\end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas

Der Fluß in die Senke sollte intuitiv dem Fluß aus der Quelle entsprechen:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis mit Lemma A:

$$\begin{aligned} f(s, V) &= f(V, V) - f(V - s, V) \\ &= -f(V - s, V) \\ &= f(V, V - s) \\ &= f(V, t) + f(V, V - s - t) \\ &= f(V, t) \text{ wegen Flußerhaltung} \end{aligned}$$

Residualnetzwerke

„Netzwerk minus Fluß = Residualnetzwerk“

Definition

Gegeben ist ein Netzwerk $G = (V, E)$ und ein Fluß f. Das Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ zu G und f ist definiert vermöge

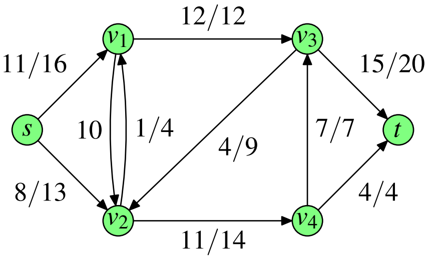
$$E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \},$$

wobei

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v).$$

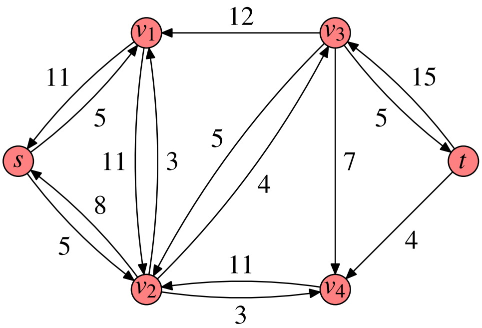
c_f ist die Restkapazität.
Das s-t-Netzwerk G_f hat die Kapazitäten c_f.

Beispiel



s-t-Netzwerk G mit Fluß f

Residualnetzwerk G_f

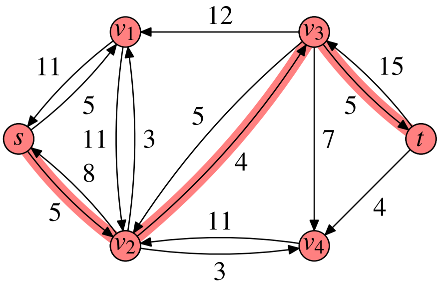


Augmentierende Pfade

Ein s-t-Pfad p in G_f heißt augmentierender Pfad.

$c_f(p) = \min\{\, c_f(u,v) \mid (u,v) \text{ ist auf } p \,\}$ heißt Restkapazität von p.

Beispiel:



Die Restkapazität dieses Pfades ist 4.

Die Ford–Fulkerson–Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluß f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p
return f

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u,v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v,u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Augmentiere f entlang p: $f := f + f_p$

f_p ist ein Fluß in G_f

Die Ford–Fulkerson–Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluß f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p
return f

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u,v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v,u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Augmentiere f entlang p: $f := f + f_p$

f_p ist ein Fluß in G_f