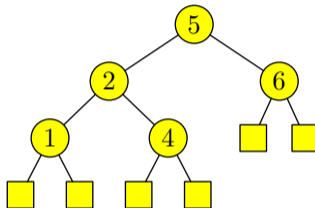


Übersicht

2 Suchen und Sortieren

- Einfache Suche
- **Binäre Suchbäume**
- Hashing
- Skip-Lists
- Mengen
- Sortieren
- Order-Statistics

Binäre Suchbäume



- Als assoziatives Array geeignet
- Schlüssel aus geordneter Menge
- Linke Kinder kleiner, rechte Kinder größer als Elternknoten
- Externe und interne Knoten
- Externe Knoten zu einem Sentinel zusammenfassen?

Binäre Suchbäume

Java

```
public class Searchtree<K extends Comparable<K>, D> extends AbstractMap<K, D> {  
    protected Searchtreenode<K, D> root;
```

Java

```
class Searchtreenode<K extends Comparable<K>, D> {  
    K key;  
    D data;  
    Searchtreenode<K, D> left, right, parent;
```

Binäre Suchbäume – Suchen

Java

```
public D find(K k) {  
    if(root == null) return null;  
    SearchTreeNode<K, D> n = root.findsubtree(k);  
    return n == null ? null : n.data;  
}
```

Im Gegensatz zu Liste:

Zusätzlicher Test auf **null**.

Binäre Suchbäume – Suchen

Java

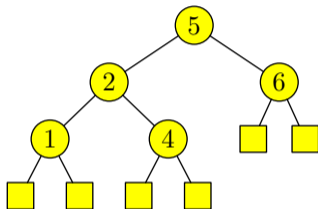
```
Searchtreenode<K, D> findsubtree(K k) {  
    int c = k.compareTo(key);  
    if(c > 0) return right == null ? null : right.findsubtree(k);  
    else if(c < 0) return left == null ? null : left.findsubtree(k);  
    else return this;  
}
```

Wieder zusätzlicher Test auf **null**.

Durch Sentinel verhindern!

Besser: Iterativ statt rekursiv.

Binäre Suchbäume – Einfügen

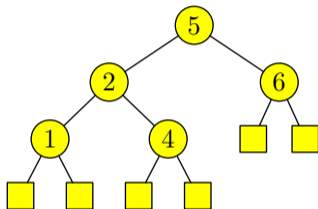


Wo fügen wir 3 ein?

Wie fügen wir es ein?

In den richtigen externen Knoten!

Binäre Suchbäume – Einfügen

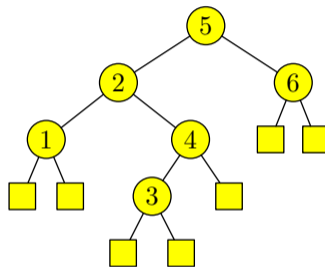
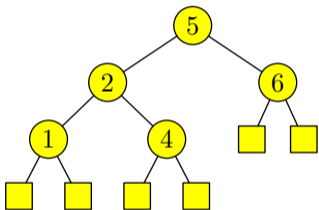


Wo fügen wir 3 ein?

Wie fügen wir es ein?

In den richtigen externen Knoten!

Binäre Suchbäume – Einfügen



Wo fügen wir 3 ein?

Wie fügen wir es ein?

In den richtigen externen Knoten!

Binäre Suchbäume – Einfügen

Java

```
public void insert(K k, D d) {  
    if (root == null) root = newNode(k, d);  
    else root.insert(newNode(k, d));  
}
```

Binäre Suchbäume – Einfügen

Java

```
public void insert(Searchtreenode<K, D> n) {  
    int c = n.key.compareTo(key);  
    if(c < 0) {  
        if(left  $\neq$  null) left.insert(n);  
        else { left = n; left.parent = this; }  
    }  
    else if(c > 0) {  
        if(right  $\neq$  null) right.insert(n);  
        else { right = n; right.parent = this; }  
    }  
    else copy(n);  
}
```

Binäre Suchbäume – Löschen

Beim Löschen unterscheiden wir drei Fälle:

- Blatt (einfach)
- Der Knoten hat kein linkes Kind (einfach)
- Der Knoten hat ein linkes Kind (schwierig)

Damit sind alle Fälle abgedeckt!

Warum kein Fall: Kein rechtes Kind?

Binäre Suchbäume – Löschen

Beim Löschen unterscheiden wir drei Fälle:

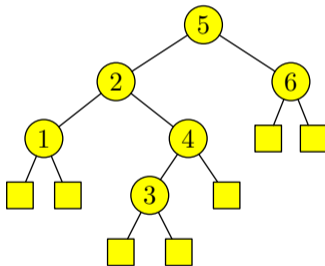
- Blatt (einfach)
- Der Knoten hat kein linkes Kind (einfach)
- Der Knoten hat ein linkes Kind (schwierig)

Damit sind alle Fälle abgedeckt!

Warum kein Fall: Kein rechtes Kind?

Binäre Suchbäume – Löschen

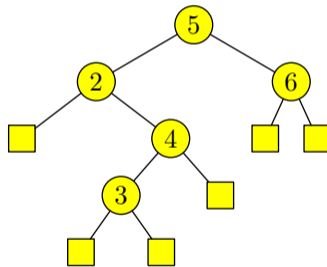
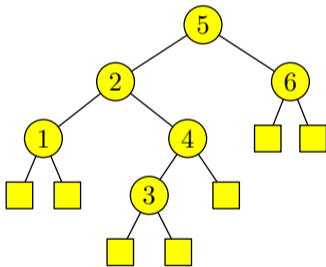
Löschen eines Blatts:



Ein Blatt kann durch Zeigerverbiegen gelöscht werden.

Binäre Suchbäume – Löschen

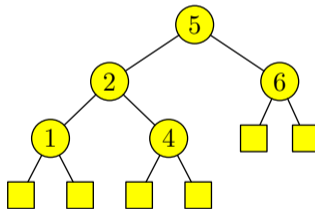
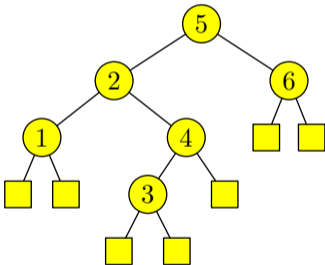
Löschen eines Blatts:



Ein Blatt kann durch Zeigerverbiegen gelöscht werden.

Binäre Suchbäume – Löschen

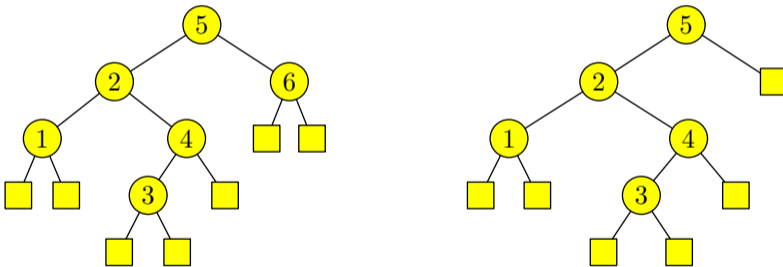
Löschen eines Blatts:



Ein Blatt kann durch Zeigerverbiegen gelöscht werden.

Binäre Suchbäume – Löschen

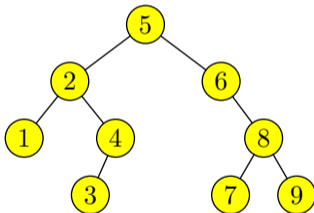
Löschen eines Blatts:



Ein Blatt kann durch Zeigerverbiegen gelöscht werden.

Binäre Suchbäume – Löschen

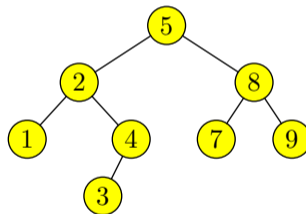
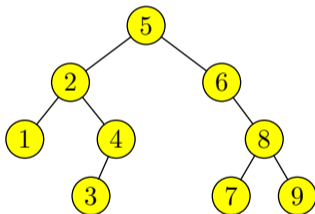
Löschen eines Knotens ohne linkes Kind:



Wir können kopieren oder Zeiger verbiegen.

Binäre Suchbäume – Löschen

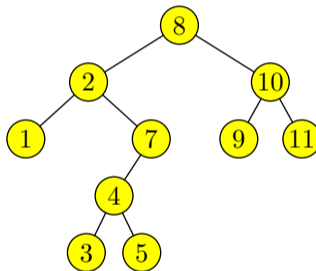
Löschen eines Knotens ohne linkes Kind:



Wir können kopieren oder Zeiger verbiegen.

Binäre Suchbäume – Löschen

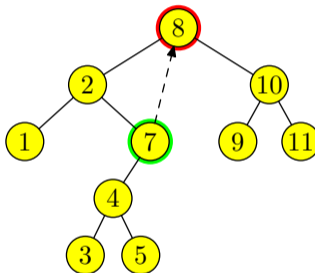
Löschen eines Knotens mit linkem Kind:



- 1 Finde den größten Knoten im linken Unterbaum
- 2 Kopiere seinen Inhalt
- 3 Lösche ihn

Binäre Suchbäume – Löschen

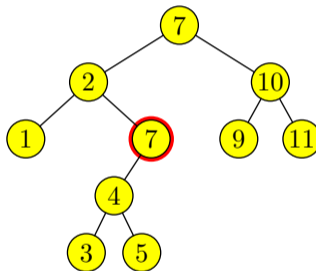
Löschen eines Knotens mit linkem Kind:



- 1 Finde den größten Knoten im linken Unterbaum
- 2 Kopiere seinen Inhalt
- 3 Lösche ihn

Binäre Suchbäume – Löschen

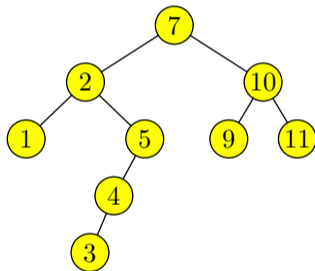
Löschen eines Knotens mit linkem Kind:



- 1 Finde den größten Knoten im linken Unterbaum
- 2 Kopiere seinen Inhalt
- 3 Lösche ihn

Binäre Suchbäume – Löschen

Löschen eines Knotens mit linkem Kind:



- 1 Finde den größten Knoten im linken Unterbaum
- 2 Kopiere seinen Inhalt
- 3 Lösche ihn

Binäre Suchbäume – Löschen

In der Klasse Searchtree $\langle K, D \rangle$:

Java

```
public void delete(K k) {  
    if(root == null) return;  
    if(root.left == null && root.right == null && root.key == k)  
        root = null;  
    else {  
        Searchtreenode $\langle K, D \rangle$  n = root.findsubtree(k);  
        if(n  $\neq$  null) n.delete();  
    }  
}
```

Binäre Suchbäume – Löschen

Java

```
void delete() {  
    if(left == null && right == null) {  
        if(parent.left == this) parent.left = null;  
        else parent.right = null; }  
    else if(left == null) {  
        if(parent.left == this) parent.left = right;  
        else parent.right = right;  
        right.parent = parent; }  
    else {  
        Searchtreenode<K, D> max = left;  
        while(max.right != null) max = max.right;  
        copy(max); max.delete();  
    }  
}
```


Binäre Suchbäume – Löschen

In Searchtree $\langle K, D \rangle$ jetzt korrekt:

Java

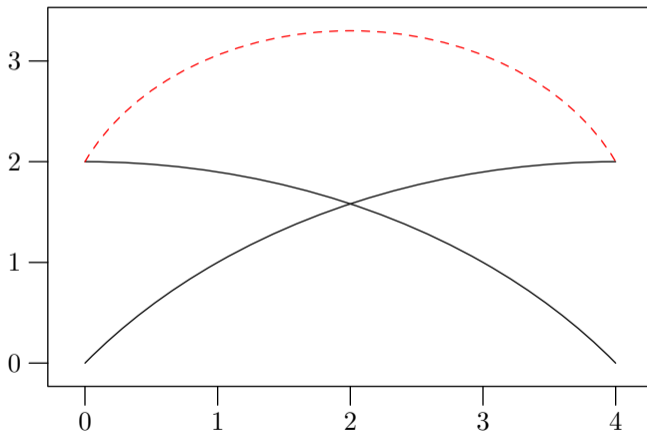
```
public void delete(K k) {  
    if(root == null) return;  
    if(root.key.equals(k)  
        if(root.left == null && root.right == null) {  
            root = null; return;  
        }  
        else if(root.left == null) {  
            root = root.right; root.parent = null; return;  
        }  
    Searchtreenode $\langle K, D \rangle$  n = root.findsubtree(k);  
    if(n  $\neq$  null) n.delete();  
}
```

Binäre Suchbäume – Beispiel

Die Schlüssel von 1 bis 40 werden zufällig eingefügt oder gelöscht.

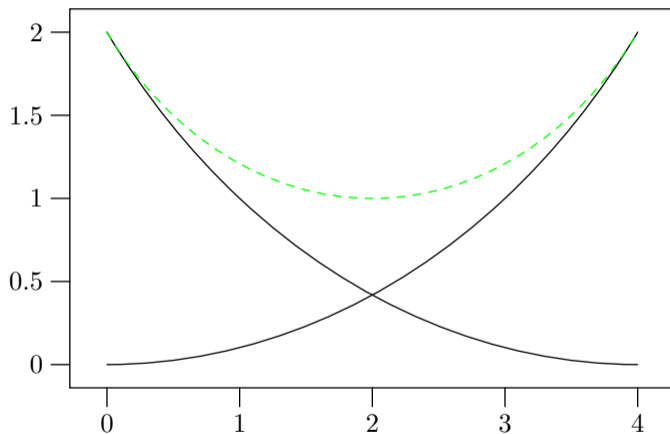


Binäre Suchbäume – Analyse



Summe schlechte Näherung des Maximums.

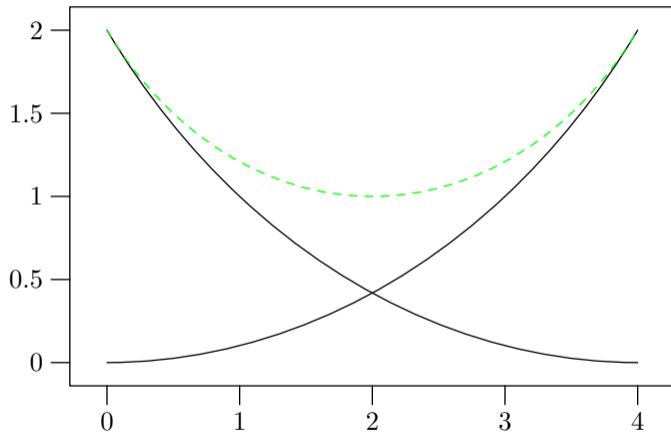
Binäre Suchbäume – Analyse



Summe gute Näherung des Maximums.

Die Kurven sind **steiler**.

Binäre Suchbäume – Analyse



Summe gute Näherung des Maximums.

Die Kurven sind **steiler**.

Binäre Suchbäume – Analyse

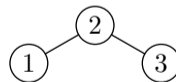
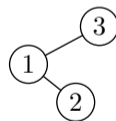
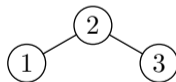
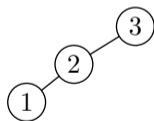
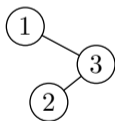
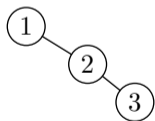
Wir fügen die Knoten $1, \dots, n$ in zufälliger Reihenfolge in einen leeren Suchbaum ein.

Sei T_n die Höhe dieses Suchbaums.

Wir interessieren uns für $E(T_n)$.

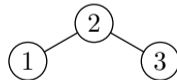
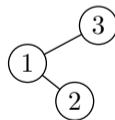
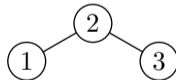
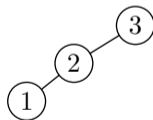
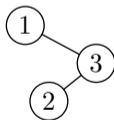
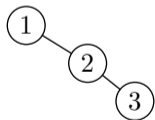
Wir betrachten erst einmal T_0 , T_1 , T_2 und T_3 :

- $E(T_0) = 0$
- $E(T_1) = 1$
- $E(T_2) = 2$
- $E(T_3) = 8/3$



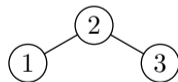
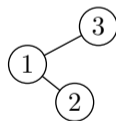
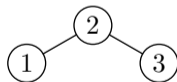
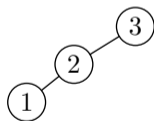
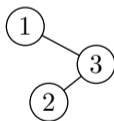
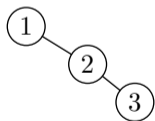
Wir betrachten erst einmal T_0 , T_1 , T_2 und T_3 :

- $E(T_0) = 0$
- $E(T_1) = 1$
- $E(T_2) = 2$
- $E(T_3) = 8/3$



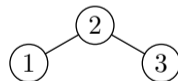
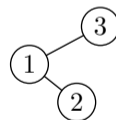
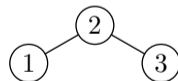
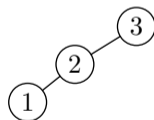
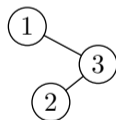
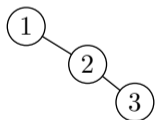
Wir betrachten erst einmal T_0 , T_1 , T_2 und T_3 :

- $E(T_0) = 0$
- $E(T_1) = 1$
- $E(T_2) = 2$
- $E(T_3) = 8/3$



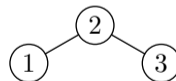
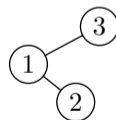
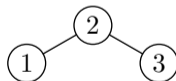
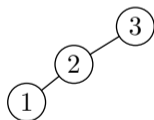
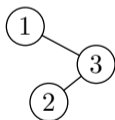
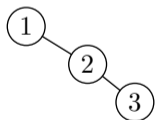
Wir betrachten erst einmal T_0 , T_1 , T_2 und T_3 :

- $E(T_0) = 0$
- $E(T_1) = 1$
- $E(T_2) = 2$
- $E(T_3) = 8/3$



Wir betrachten erst einmal T_0 , T_1 , T_2 und T_3 :

- $E(T_0) = 0$
- $E(T_1) = 1$
- $E(T_2) = 2$
- $E(T_3) = 8/3$



Allgemeiner Fall:

Die **Wurzel** des Baums enthält $W \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Pr[W = k] = 1/n \text{ für } k \in \{1, \dots, n\}$$

Wie sieht der Rest des Baums aus, falls $W = k$?

In den linken Teilbaum wurden $\{1, \dots, k-1\}$ in **zufälliger** Reihenfolge eingefügt.

Seine Höhe ist T'_{k-1} .

Die Höhe des rechten Teilbaums ist T''_{n-k} .

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

Allgemeiner Fall:

Die **Wurzel** des Baums enthält $W \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Pr[W = k] = 1/n \text{ für } k \in \{1, \dots, n\}$$

Wie sieht der Rest des Baums aus, falls $W = k$?

In den linken Teilbaum wurden $\{1, \dots, k-1\}$ in **zufälliger** Reihenfolge eingefügt.

Seine Höhe ist T'_{k-1} .

Die Höhe des rechten Teilbaums ist T''_{n-k} .

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

Allgemeiner Fall:

Die **Wurzel** des Baums enthält $W \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Pr[W = k] = 1/n \text{ für } k \in \{1, \dots, n\}$$

Wie sieht der Rest des Baums aus, falls $W = k$?

In den linken Teilbaum wurden $\{1, \dots, k-1\}$ in **zufälliger** Reihenfolge eingefügt.

Seine Höhe ist T'_{k-1} .

Die Höhe des rechten Teilbaums ist T''_{n-k} .

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

Allgemeiner Fall:

Die **Wurzel** des Baums enthält $W \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Pr[W = k] = 1/n \text{ für } k \in \{1, \dots, n\}$$

Wie sieht der Rest des Baums aus, falls $W = k$?

In den linken Teilbaum wurden $\{1, \dots, k-1\}$ in **zufälliger** Reihenfolge eingefügt.

Seine Höhe ist T'_{k-1} .

Die Höhe des rechten Teilbaums ist T''_{n-k} .

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1)$$

Wir können das Maximum durch die Summe abschätzen:

$$E(T_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (E(T_{k-1}) + E(T_{n-k}) + 1)$$

Leider zu grob! Führt zu einer schlechten Abschätzung.

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1)$$

Wir können das Maximum durch die Summe abschätzen:

$$E(T_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (E(T_{k-1}) + E(T_{n-k}) + 1)$$

Leider zu grob! Führt zu einer schlechten Abschätzung.

Die Gesamthöhe ist $T_n = \max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1$.

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\max\{T'_{k-1}, T''_{n-k}\} + 1)$$

Wir können das Maximum durch die Summe abschätzen:

$$E(T_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (E(T_{k-1}) + E(T_{n-k}) + 1)$$

Leider zu grob! Führt zu einer schlechten Abschätzung.

Problem:

$E(\max\{X, Y\}) \leq E(X) + E(Y)$ korrekt, aber zu ungenau.

$E(\max\{X, Y\}) \leq \max\{E(X), E(Y)\}$ genau genug, aber zu unkorrekt.

Führe neue Zufallsvariablen ein:

$$\hat{T}_n = 2^{T_n}, \quad \hat{T}'_n = 2^{T'_n}, \quad \hat{T}''_n = 2^{T''_n}$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1\right)$$

$$E\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1}\right)$$

Die Kurven sind jetzt steiler!

Problem:

$E(\max\{X, Y\}) \leq E(X) + E(Y)$ korrekt, aber zu ungenau.

$E(\max\{X, Y\}) \leq \max\{E(X), E(Y)\}$ genau genug, aber zu unkorrekt.

Führe neue Zufallsvariablen ein:

$$\hat{T}_n = 2^{T_n}, \quad \hat{T}'_n = 2^{T'_n}, \quad \hat{T}''_n = 2^{T''_n}$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1\right)$$

$$E\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1}\right)$$

Die Kurven sind jetzt steiler!

Problem:

$E(\max\{X, Y\}) \leq E(X) + E(Y)$ korrekt, aber zu ungenau.

$E(\max\{X, Y\}) \leq \max\{E(X), E(Y)\}$ genau genug, aber zu unkorrekt.

Führe neue Zufallsvariablen ein:

$$\hat{T}_n = 2^{T_n}, \quad \hat{T}'_n = 2^{T'_n}, \quad \hat{T}''_n = 2^{T''_n}$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1\right)$$

$$E\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1}\right)$$

Die Kurven sind jetzt steiler!

Problem:

$E(\max\{X, Y\}) \leq E(X) + E(Y)$ korrekt, aber zu ungenau.

$E(\max\{X, Y\}) \leq \max\{E(X), E(Y)\}$ genau genug, aber zu unkorrekt.

Führe neue Zufallsvariablen ein:

$$\hat{T}_n = 2^{T_n}, \quad \hat{T}'_n = 2^{T'_n}, \quad \hat{T}''_n = 2^{T''_n}$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1\right)$$

$$E\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1}\right)$$

Die Kurven sind jetzt steiler!

Vereinfachen wir diese Rekursionsgleichung zunächst:

$$\begin{aligned}
 E \hat{T}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\}+1}\right) = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2E(\max\{2^{T'_k}, 2^{T''_{n-k-1}}\}) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(\max\{\hat{T}'_k, \hat{T}''_{n-k-1}\}) \\
 &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(\hat{T}'_k + \hat{T}''_{n-k-1}) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (E \hat{T}_k + E \hat{T}_k) = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k
 \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung läßt sich mit Standardmethoden lösen.

→ Vorlesung **Analyse von Algorithmen**

Vereinfachen wir diese Rekursionsgleichung zunächst:

$$\begin{aligned}
 E \hat{T}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1} \right) = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2 E \left(\max\{2^{T'_k}, 2^{T''_{n-k-1}}\} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\max\{\hat{T}'_k, \hat{T}''_{n-k-1}\} \right) \\
 &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\hat{T}'_k + \hat{T}''_{n-k-1} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (E \hat{T}'_k + E \hat{T}''_k) = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k
 \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung lässt sich mit Standardmethoden lösen.

→ Vorlesung **Analyse von Algorithmen**

Vereinfachen wir diese Rekursionsgleichung zunächst:

$$\begin{aligned} E \hat{T}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(2^{\max\{T'_k, T''_{n-k-1}\} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2 E \left(\max\{2^{T'_k}, 2^{T''_{n-k-1}}\} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\max\{\hat{T}'_k, \hat{T}''_{n-k-1}\} \right) \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\hat{T}'_k + \hat{T}''_{n-k-1} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (E \hat{T}_k + E \hat{T}_k) = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung läßt sich mit Standardmethoden lösen.

→ Vorlesung **Analyse von Algorithmen**

$$E \hat{T}_n = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k$$

Wir „lösen“ diese Gleichung nicht.

Wir zeigen nur, daß $E \hat{T}_n \leq (n+3)^3 = (n+3)(n+2)(n+1)$:

$$n = 1: E \hat{T}_1 = 2 \leq (1+3)^3$$

$n > 1$:

$$E \hat{T}_n \leq \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k \stackrel{\text{i.V.}}{\leq} \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+3)^3 = (n+3)^3.$$

$$E \hat{T}_n = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k$$

Wir „lösen“ diese Gleichung nicht.

Wir zeigen nur, daß $E \hat{T}_n \leq (n+3)^3 = (n+3)(n+2)(n+1)$:

$$n = 1: E \hat{T}_1 = 2 \leq (1+3)^3$$

$n > 1$:

$$E \hat{T}_n \leq \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k \stackrel{\text{i.V.}}{\leq} \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+3)^3 = (n+3)^3.$$

$$E \hat{T}_n = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k$$

Wir „lösen“ diese Gleichung nicht.

Wir zeigen nur, daß $E \hat{T}_n \leq (n+3)^3 = (n+3)(n+2)(n+1)$:

$$n = 1: E \hat{T}_1 = 2 \leq (1+3)^3$$

$n > 1$:

$$E \hat{T}_n \leq \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E \hat{T}_k \stackrel{\text{i.V.}}{\leq} \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+3)^3 = (n+3)^3.$$

Polynome verhalten sich gut beim Integrieren.

Lemma

$$\int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Fallende Potenzen verhalten sich gut beim Summieren.

Lemma

Es seien $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ mit $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Des weiteren seien $w_1, \dots, w_n \geq 0$.

Dann gilt

$$2^{\sum_{k=1}^n w_k p_k} \leq \sum_{k=1}^n 2^{w_k} p_k.$$

Beweis.

Wir betrachten $f(t) = 2^a t + 2^b(1-t)$ und $g(t) = 2^{at+b(1-t)}$ im Einheitsintervall.

Es sei $a \neq b$.

- f ist linear
- g ist überall links- oder rechtsgekrümmt:
Denn $g''(t) = g(t)(\ln 2)^2(a-b)$.
- O.B.d.A. $a > b$, dann ist g rechtsgekrümmt.
- $f(0) = g(0) \leq f(1) = g(1) \Rightarrow f(t) \geq g(t)$

Daraus folgt

$$2^{\sum_{k=1}^n w_k p_k} \leq \sum_{k=1}^n 2^{w_k} p_k$$

für $n = 2$.



Beweis.

Wir betrachten $f(t) = 2^a t + 2^b(1-t)$ und $g(t) = 2^{at+b(1-t)}$ im Einheitsintervall.

Es sei $a \neq b$.

- f ist linear
- g ist überall links- oder rechtsgekrümmt:
Denn $g''(t) = g(t)(\ln 2)^2(a-b)$.
- O.B.d.A. $a > b$, dann ist g rechtsgekrümmt.
- $f(0) = g(0) \leq f(1) = g(1) \Rightarrow f(t) \geq g(t)$

Daraus folgt

$$2^{\sum_{k=1}^n w_k p_k} \leq \sum_{k=1}^n 2^{w_k} p_k$$

für $n = 2$.



Beweis.

Für $n > 2$ gilt:

$$2^{\sum_{k=1}^n k p_k} = 2^{n p_n + \sum_{k=1}^{n-1} k p_k} = 2^{n p_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k p_k}{1 - p_n} \right) (1 - p_n)} \leq$$

$$\stackrel{\text{i.V.}}{\leq} 2^n p_n + 2^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k p_k}{1 - p_n}} (1 - p_n) \leq$$

$$\stackrel{\text{i.V.}}{\leq} 2^n p_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \frac{p_k}{1 - p_n} \right) (1 - p_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^n 2^k p_k$$



Kommen wir zurück zu

$$E\hat{T}_n \leq (n+3)^3.$$

Es gilt:

$$2^{ET_n} = 2^{\sum_{k=1}^n k \Pr[T_n=k]} \leq \sum_{k=1}^n 2^k \Pr[T_n = k] = E(2^{T_n})$$

Und damit:

$$ET_n \leq \log(E\hat{T}_n) \leq \log((n+3)^3) = \log(n^3(1 + O(1/n))) = 3 \log(n) + O(1/n)$$

Fertig!

Theorem (Mittlere Höhe eines Suchbaums)

Werden in einen leeren binären Suchbaum n verschiedene Schlüssel in zufälliger Reihenfolge eingefügt, dann ist die erwartete Höhe des entstehenden Suchbaums $O(\log n)$.

Wir verzichten auf eine Analyse für gemischtes Einfügen und Löschen.

Hier ist nicht so viel bekannt.

Experimente zeigen gutes Verhalten.