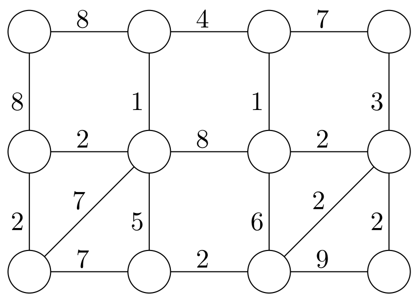
RWTH Aachen **SS 2016**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Blatt 12
Rossmanith–Hensel–Kuinke–Sánchez 11. Juli 2016

Übung zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen

Aufgabe T36

Finden Sie jeweils einen minimalen Spannbaum mithilfe der Algorithmen von Kruskal und Prim für folgenden Graphen:



Aufgabe T37

Gegeben sind n sportliche Aktivitäten mit einem Zeitintervall. Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der möglichst viele von diesen Aktivitäten auswählt, so daß sie sich nicht zeitlich überlappen. Was ist die Laufzeit?
Hinweis: Nehmen Sie einen Greedy-Algorithmus.

Aufgabe T38

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$. Mit $G[F]$ bezeichnen wir den von der Kantenmenge $F \subseteq E$ induzierten Untergraphen. Dieser hat als Knoten alle Knoten des Graphen G und als Kantenmenge genau F.
Es sei $\mathcal{F} = \{\, F \subseteq E \mid G[F]$ ist kreisfrei und hat mindestens drei Komponenten $\}$. Beweisen Sie, daß $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid ist.

Aufgabe H33 (10 Punkte)

Geben Sie eine Folge von Union- und Find-Operationen an, die zu einem Baum der Höhe vier führt (vier Knoten übereinander). Verwenden Sie dabei sowohl die Rangheuristik als auch Pfadkompression.
Nehmen Sie an, daß bei der Operation $\mathit{union}(A, B)$ der Baum B in A eingehängt wird, falls beide gleichen Rang haben. Geben Sie das Zwischenergebniss nach jeder Operation an.

Aufgaben H34 (12 Punkte)

Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der für einen Graph mit Kantengewichten eine Menge von bis zu drei Bäumen berechnet, welche den ganzen Graphen aufspannen und minimales Gesamtgewicht besitzen.
Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus korrekt ist und analysieren Sie seine Laufzeit.

Aufgabe H35 (15 Punkte)

Die Produktionsaufträge $J_1, J_2, \ldots, J_n$ eines Unternehmens benötigen verschiedene Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, wobei ein Auftrag auch mehrere Maschinen belegen kann. Ein Auftrag bringt natürlich einen gewissen Geldbetrag ein. Die Maschinen können entweder gekauft werden — diese Kosten entstehen dann nur einmal und jede weitere Nutzung ist Kostenfrei — oder gemietet werden. Letzteres kostet pro Auftrag einen gewissen Betrag (dieser Betrag variiert also von Auftrag zu Auftrag!). Die dritte Tabelle enthält die Mietkosten der Maschinen für die jeweiligen Aufträge, eine leere Zelle bedeutet, daß diese Maschine für diesen Auftrag nicht benötigt wird, ansonsten benötigt man *alle* anderen Maschinen für diesen Auftrag. Zum Beispiel kostet Auftrag J_1 auf der Maschine M_1 30 Geldeinheiten (vorausgesetzt, M_1 wurde nicht gekauft).

Für so ein Szenario mit gegebenen Aufträgen, Maschinen und Kosten soll eine gewinnmaximierende Menge von Aufträgen mit entsprechender Zuteilung von Maschinen berechnet werden. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Begründen Sie, wieso Ihr Verfahren korrekt funktioniert.

Benutzen Sie Ihr Verfahren, um eine optimale Lösung für das gegebene Szenario zu berechnen.

Auftrag	Zahlung
J_1	80
J_2	80
J_3	120

Maschine	Kaufpreis
M_1	60
M_2	80
M_3	100
M_4	30

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	30		50	
J_2		60	22	
J_3	30	30	30	30

Aufgabe H36 (10 Punkte)

Finden Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität in diesem Graphen. Aus wievielen Kanten besteht es?