

Übung zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen

Aufgabe T26

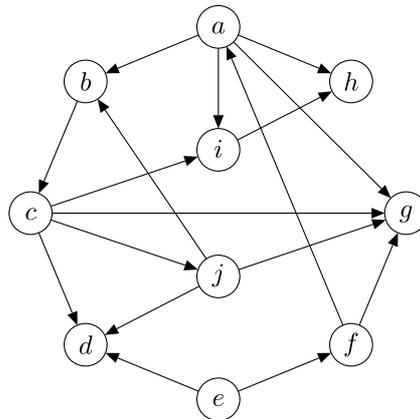
Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für gerichtete Graphen $G = (V, E)$ in $O(|V| + |E|)$ Schritten entscheidet, ob jeder Knoten aus V auf einem gerichteten Kreis liegt.

Aufgabe T27

Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder endliche ungerichtete Graph mit mehr als einem Knoten hat mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

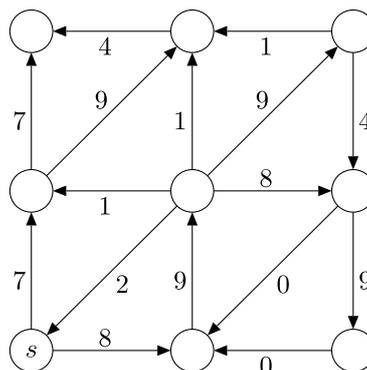
Aufgabe T28

Führen Sie eine Breitensuche auf dem folgenden Graphen durch. Beginnen Sie bei a . Zeichnen Sie die Baumkanten ein. Welche Knoten werden nicht erreicht? Was sind die kürzesten Pfade zu den erreichbaren Knoten?



Aufgabe T29

Finden Sie die kürzesten Wege zu allen Knoten vom Startknoten s , indem Sie den Algorithmus von Dijkstra verwenden.



Aufgabe H23 (7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn man einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ in einen gerichteten Graphen $G' = (V, E')$ umwandelt, indem man jede ungerichtete Kante $\{u, v\}$ durch zwei gerichtete Kanten (u, v) und (v, u) ersetzt, dann ist G genau dann kreisfrei, wenn eine Tiefensuche auf G' keine Vorwärtskante zutage fördert.

Aufgabe H24 (15 Punkte)

Eine Zahl darf durch folgende Operationen verändert werden:

1. Multiplikation mit drei.
2. Multiplikation mit zwei und anschließendes Abziehen von 323.
3. Addition von 27.
4. Subtraktion von 13.

Finden Sie eine kürzest mögliche Folge von Operationen, die die Zahl 1 in die Zahl 10000 verwandelt. Die Zahl darf dabei zwischendurch nicht negativ werden. Implementieren Sie ein Programm, welches dieses Problem löst. Geben Sie als Lösung sowohl das Programm als auch seine Ausgabe ab. Die Ausgabe des Programms sollte den Weg von 1 zu 10000 in einer nachvollziehbaren Weise enthalten.

Hinweis: Wir können dieses Problem als ein Suchproblem auf gerichteten Graphen interpretieren. Der Graph hat die nicht-negativen ganzen Zahlen als Knoten und es gibt eine Kante von n nach m , wenn wir n durch eine der vier Operationen in m verwandeln können.

Dieser Graph ist unendlich groß. Es ist allerdings sehr einfach, die Nachbarn eines Knotens aufzuzählen. Es bietet sich daher an, auf diesem implizit gegebenen Graphen eine Breitensuche durchzuführen, die bei 1 beginnt.

Aufgabe H25 (10 Punkte)

Die Rekursionsformel von Quickselect für $n \geq 2$, war in der Vorlesung gegeben.

$$C_n \leq n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} C_i$$

Es gilt außerdem $C_0 = C_1 = 0$.

Beweisen Sie per Induktion, daß $C_n \leq 4n$ für alle n gilt.