**RWTH Aachen** **SS 2016**
**Lehrgebiet Theoretische Informatik** Lösungsvorschlag 11
Rossmanith–Hensel–Kuinke–Sánchez 4. Juli 2016

**Übung zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen**

## Aufgabe T33

$$f(X,Y) \overset{Def.}{=} \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y) \overset{Symm.}{=} \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} -f(y,x) =$$
$$\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} -f(y,x) = -\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} f(y,x) \overset{Def.}{=} -f(Y,X)$$

Aufgepasst: Welche Rolle spielen hier das Kommutativitäts-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz?

## Aufgabe T34

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Preise der Gegenstände. Das Problem läßt sich leicht als Matchingproblem darstellen. Wir konstruieren einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ mit den folgenden Knoten $A = \{1 \le i \le n \mid x_i \text{ ist gerade}\}$ und $B = \{1 \le i \le n \mid x_i \text{ ist ungerade}\}$. Wir verbinden $i \in A$ mit $j \in B$, falls der Centbetrag $c$ von $x_i + x_j$ entweder 11, 33, 55, 77 oder 99 ist.

Es ist leicht einzusehen, daß ein maximales Matching in $G$ genau eine Lösung unseres Problems darstellt. Formal wäre zu zeigen, daß jedes Matching eine Lösung unseres Problems darstellt und anders herum. Auf Grund der Konstruktion ist dies jedoch offensichtlich.

## Aufgabe T35

Wir konstruieren auf der Knotenmenge $\{s,t\} \cup \{K_1, \ldots, K_n\} \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ das folgende Flußproblem:

1. Von der Quelle $s$ läuft zu jedem Knoten $K_i$ eine Kante mit Kapazität $k_i$.
2. Für jedes $Z_j \in R_i$ läuft eine Kante mit unendlicher Kapazität von $K_i$ nach $Z_j$.
3. Von jedem Knoten $Z_i$ läuft eine Kante mit Kapazität $z_i$ in die Senke $t$.

Ein Min-Cut für dieses Netzwerk ist natürlich endlich, da es endliche Schnitte gibt (beispielsweise die Menge aller Kanten, die in $s$ beginnen). Die gestrichenen Kanten entsprechen jeweils verzichtetem Gewinn (durch Verzicht auf einen Touristen oder Verzicht auf die Ersparnis durch Nichtmitnahme eines Spielzeugs). Die Kanten mit unendlicher Kapazität können nicht saturiert werden und werden damit nie vom Schnitt betroffen sein. Somit entspricht jeder Min-Cut einer legalen Konfiguration (und andersherum).

Anders gesagt: Sei $K$ die Menge der Gewinne, welche die Kandidaten die mitgenommen werden, bezahlen und $Z_K$ die Menge der Preise der Spielzeuge, welche für die Kandidaten, die zur Menge $K$ gehören, gekauft werden müssen. Wir wollen dann eine Menge $K$ finden, sodaß die Funktion

$$\sum_{k \in K} k - \sum_{z \in Z_K} z$$

maximiert wird. Wir können diese Funktion folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\sum_{k \in K} k - \sum_{z \in Z_K} z &= \Big( \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} k_i - \sum_{k \notin K} k \Big) - \sum_{z \in Z_K} z \\ &= \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} k_i - \Big( \sum_{k \notin K} k + \sum_{z \in Z_K} z \Big)\end{aligned}$$

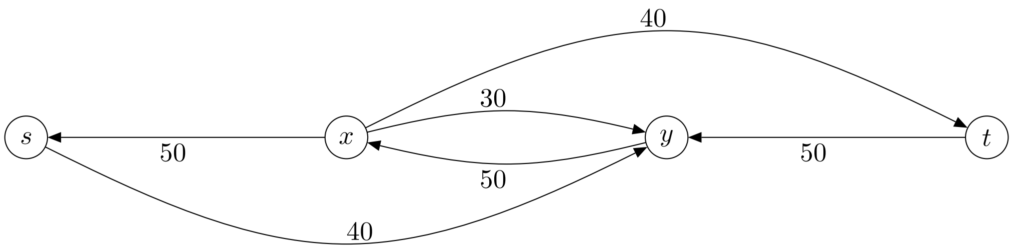
Da $\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} k_i$ nicht von der Lösungsmenge $K$ abhängt, ist diese Funktion genau dann maximal, wenn $\sum_{k \notin K} k + \sum_{z \in Z_K} z$ minimal ist.
Jeder Schnitt im oben beschriebenen Netzwerk stell eine Lösung da. Wir kaufen alle Spielzeuge deren Kante geschnitten wird und nehmen alle Kandidaten mit deren Kante *nicht* geschnitten wird. Somit gibt uns der minimale Schnitt eine Lösung die $\sum_{k \notin K} k + \sum_{z \in Z_K} z$ minimiert, und somit ist dies eine optimale Lösung.

**Aufgabe H29**

$$f(X \dot\cup Y, Z) \overset{Def.}{=} \sum_{v \in X \dot\cup Y} \sum_{z \in Z} f(v, z) =$$

$$\sum_{x \in X} \sum_{z \in Z} f(x, z) + \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Z} f(y, z) \overset{Def.}{=} f(X, Z) + f(Y, Z)$$

**Aufgabe H30**




**Aufgabe H31**
Wir bauen folgendes $s,t$-Netzwerk $N$ aus $G$:

1. $N$ enthalte zunächst alle Knoten $V(G)$
2. Wir ergänzen die Quelle $s$ und fügen gerichtete Kanten $(s, v)$ mit Kapazität $p(v)$ für alle $v \in V(G)$ ein
3. Für jede Kante $e = (u, v) \in E(G)$ fügen wir einen neuen Knoten $w_e$ ein, anschließend ergänzen wir die Kanten $(u, w_e)$ und $(v, w_e)$ mit Kapazität eins
4. Zuletzt führen wir eine Senke $t$ ein und verbinden alle vorher eingefügten Knoten $w_e$ mit $t$ mittels Kanten $(w_e, t)$ mit Kapazitkät eins

Es bleibt zu zeigen, daß $N$ genau dann einen maximalen Fluß $f$ mit $|f| = m$ hat, wenn für $G$ eine wie oben beschriebenen Zuordnung $g$ existiert.

Nehmen wir an, $f$ sei ein maximaler Fluß mit Betrag $m$. Aufgrund der Flußerhaltung kann für jedes Paar $u, v$ mit $e := (u, v) \in E(G)$ jeweils nur eine der Kanten $(u, w_e)$, $(v, w_e)$ in $N$ durch $f$ gesättigt sein, weiterhin fließen in jeden Knoten $v \in V(N) \cap V(G)$ maximal $p(v)$ Flußeinheiten. Damit erhalten wir eine gültige Zuordnung $g$ wie folgt:

$$g(e) = \begin{cases} u & f \text{ sättigt } (u, w_e) \\ v & f \text{ sättigt } (v, w_e) \end{cases}$$

Nehmen wir umgekehrt an, $G$ habe eine gültige Zuordnung $g$. Dann können wir leicht einen Fluß $f$ für $N$ konstruieren:

$$\begin{aligned} f(s, v) &= p(v) \text{ für } v \in V(G) && (1) \\ f(v, w_{(u,v)}) = 1 &\Leftrightarrow g((u, v)) = v && (2) \\ f(w_e, t) &= 1 && (3) \end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, daß $f$ tatsächlich ein Fluß in $N$ ergibt. Die Maximalität folgt schlicht aus der Tatsache, daß alle Kanten zu $t$ saturiert sind.