RWTH Aachen
Lehrgebiet Theoretische Informatik
Rossmanith–Hensel–Kuinke–Sánchez

SS 2016
Lösungsvorschlag 5
23. Mai 2016

Übung zur Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen

Aufgabe T14

Wir analysieren die Laufzeit mit Hilfe der amortisierten Analyse. Als Potenzialfunktion Φ wählen wir die Größe des linken Stacks l_i zum Zeitpunkt i, d.h. $\Phi(i) = c \cdot l_i$. Wir betrachten nun die verschiedenen Operationen.

Enqueue:
Die reellen Kosten der Einfügeoperation sind $O(1)$, d.h. wir bekommen

$$O(1) + \Phi(i) - \Phi(i-1) = O(1) + c \cdot l_i - c \cdot l_{i-1} = O(1) + c \cdot l_i - c \cdot (l_i - 1) = O(1)$$

Dequeue:
Wir betrachten 2 Fälle: Der, wenn der rechte Stack Elemente hat, und wenn er leer ist.

1. Fall: Rechter Stack ist nicht leer.
Die reellen Kosten sind $O(1)$ und $l_i = l_{i-1}$, d.h. wir haben

$$O(1) + c \cdot l_i - c \cdot l_{i-1} = O(1) + c \cdot l_i - c \cdot l_i = O(1)$$

2. Fall: Rechter Stack ist leer.
Hier müßen wir das "Umschwanken" beachten, welches lineare Zeit benötigt, d.h. die reellen Kosten sind $O(l_{i-1}) + O(1)$ und wir bekommen

$$O(l_{i-1}) + O(1) + c \cdot l_i - c \cdot l_{i-1} = O(l_{i-1}) + O(1) + 0 - c \cdot l_{i-1} = O(1)$$

Da alle Operationen durch $O(1)$ beschränkt sind, erhalten wir für n beliebige Operationen eine Laufzeit von $O(n)$.

Aufgabe T15

Suche nach 22:

- Starte an H in oberster Liste (Ebene 5)
- $22 < 32 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 4)
- $22 > 5 \Rightarrow$ Wechsel zur 5 (Ebene 4)
- $22 < 32 \Rightarrow$ Wechsel an 5 zur nächst tieferen Liste (Ebene 3)
- $22 < 32 \Rightarrow$ Wechsel an 5 zur nächst tieferen Liste (Ebene 2)

- $22 > 9 \Rightarrow$ Wechsel zur 9 (Ebene 2)
- $22 > 12 \Rightarrow$ Wechsel zur 12 (Ebene 2)
- $22 > 13 \Rightarrow$ Wechsel zur 13 (Ebene 2)
- $22 > 15 \Rightarrow$ Wechsel zur 15 (Ebene 2)
- $22 > 20 \Rightarrow$ Wechsel zur 20 (Ebene 2)
- $22 < 26 \Rightarrow$ Wechsel an 20 zur nächst tieferen Liste (Ebene 1)
- $22 < 25 \Rightarrow$ Wechsel an 20 zur nächst tieferen Liste (Ebene 0)
- $22 > 21 \Rightarrow$ Wechsel zur 21 (Ebene 0)
- $22 = 22 \Rightarrow$ 22 gefunden nach 13 Vergleichen

Suche nach 40:

- Starte an H in oberster Liste (Ebene 5)
- $40 > 32 \Rightarrow$ Wechsel zur 32 (Ebene 5)
- $40 > 37 \Rightarrow$ Wechsel zur 37 (Ebene 5)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Wechsel an 37 zur nächst tieferen Liste (Ebene 4)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Wechsel an 37 zur nächst tieferen Liste (Ebene 3)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Wechsel an 37 zur nächst tieferen Liste (Ebene 2)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Wechsel an 37 zur nächst tieferen Liste (Ebene 1)
- $40 > 39 \Rightarrow$ Wechsel zur 39 (Ebene 1)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Wechsel an 39 zur nächst tieferen Liste (Ebene 0)
- Nächstes Element ist $T \Rightarrow$ Suche endet erfolglos nach 9 Vergleichen

Suche nach 0:

- Starte an H in oberster Liste (Ebene 5)
- $0 < 32 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 4)
- $0 < 5 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 3)
- $0 < 5 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 2)
- $0 < 5 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 1)
- $0 < 1 \Rightarrow$ Wechsel an H zur nächst tieferen Liste (Ebene 0)
- $0 < 1 \Rightarrow$ Suche endet erfolglos nach 6 Vergleichen

Aufgabe T16

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß der Erwartungswert $\leq 1 + \alpha/2$ ist, also nicht mehr als 3/2 Vergleiche bei einer erfolgreichen Suche.

Die tatsächliche durchschnittliche Anzahl an Vergleichen, wenn man a und b zufällig wählt, ist 1.17.

Die Tabelle mit allen Ergebnissen:

(a,b)	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)	h(7)	h(8)	h(9)	h(10)	collisions
(1, 0)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0
(1, 1)	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	0
(1, 2)	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	0
(1, 3)	4	5	6	7	8	9	0	1	2	0	1
(1, 4)	5	6	7	8	9	0	1	2	0	1	2
(1, 5)	6	7	8	9	0	1	2	0	1	2	3
(1, 6)	7	8	9	0	1	2	0	1	2	3	3
(1, 7)	8	9	0	1	2	0	1	2	3	4	3
(1, 8)	9	0	1	2	0	1	2	3	4	5	3
(1, 9)	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	3
(1, 10)	1	2	0	1	2	3	4	5	6	7	2
(1, 11)	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	1
(1, 12)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
(2, 0)	2	4	6	8	0	2	1	3	5	7	1
(2, 1)	3	5	7	9	1	0	2	4	6	8	0
(2, 2)	4	6	8	0	2	1	3	5	7	9	0
(2, 3)	5	7	9	1	0	2	4	6	8	0	1
(2, 4)	6	8	0	2	1	3	5	7	9	1	1
(2, 5)	7	9	1	0	2	4	6	8	0	2	2
(2, 6)	8	0	2	1	3	5	7	9	1	0	2
(2, 7)	9	1	0	2	4	6	8	0	2	1	3
(2, 8)	0	2	1	3	5	7	9	1	0	2	3
(2, 9)	1	0	2	4	6	8	0	2	1	3	3
(2, 10)	2	1	3	5	7	9	1	0	2	4	2
(2, 11)	0	2	4	6	8	0	2	1	3	5	2
(2, 12)	1	3	5	7	9	1	0	2	4	6	1
(3, 0)	3	6	9	2	2	5	8	1	1	4	2
(3, 1)	4	7	0	0	3	6	9	2	2	5	2
(3, 2)	5	8	1	1	4	7	0	0	3	6	2
(3, 3)	6	9	2	2	5	8	1	1	4	7	2
(3, 4)	7	0	0	3	6	9	2	2	5	8	2
(3, 5)	8	1	1	4	7	0	0	3	6	9	2
(3, 6)	9	2	2	5	8	1	1	4	7	0	2
(3, 7)	0	0	3	6	9	2	2	5	8	1	2
(3, 8)	1	1	4	7	0	0	3	6	9	2	2
(3, 9)	2	2	5	8	1	1	4	7	0	0	3
(3, 10)	0	3	6	9	2	2	5	8	1	1	2
(3, 11)	1	4	7	0	0	3	6	9	2	2	2
(3, 12)	2	5	8	1	1	4	7	0	0	3	2
(4, 0)	4	8	2	3	7	1	2	6	0	1	2
(4, 1)	5	9	0	4	8	2	3	7	1	2	1
(4, 2)	6	0	1	5	9	0	4	8	2	3	1
(4, 3)	7	1	2	6	0	1	5	9	0	4	2
(4, 4)	8	2	3	7	1	2	6	0	1	5	2
(4, 5)	9	0	4	8	2	3	7	1	2	6	1
(4, 6)	0	1	5	9	0	4	8	2	3	7	1
(4, 7)	1	2	6	0	1	5	9	0	4	8	2
(4, 8)	2	3	7	1	2	6	0	1	5	9	2
(4, 9)	0	4	8	2	3	7	1	2	6	0	2
(4, 10)	1	5	9	0	4	8	2	3	7	1	1
(4, 11)	2	6	0	1	5	9	0	4	8	2	2
(4, 12)	3	7	1	2	6	0	1	5	9	0	2
(5, 0)	5	0	2	7	2	4	9	1	6	1	2
(5, 1)	6	1	3	8	0	5	0	2	7	2	2
(5, 2)	7	2	4	9	1	6	1	3	8	0	1
(5, 3)	8	0	5	0	2	7	2	4	9	1	2
(5, 4)	9	1	6	1	3	8	0	5	0	2	2
(5, 5)	0	2	7	2	4	9	1	6	1	3	2
(5, 6)	1	3	8	0	5	0	2	7	2	4	2
(5, 7)	2	4	9	1	6	1	3	8	0	5	1
(5, 8)	0	5	0	2	7	2	4	9	1	6	2
(5, 9)	1	6	1	3	8	0	5	0	2	7	2
(5, 10)	2	7	2	4	9	1	6	1	3	8	2
(5, 11)	3	8	0	5	0	2	7	2	4	9	2
(5, 12)	4	9	1	6	1	3	8	0	5	0	2
(6, 0)	6	2	5	1	4	0	3	9	2	8	1
(6, 1)	7	0	6	2	5	1	4	0	3	9	1
(6, 2)	8	1	7	0	6	2	5	1	4	0	2
(6, 3)	9	2	8	1	7	0	6	2	5	1	2
(6, 4)	0	3	9	2	8	1	7	0	6	2	2
(6, 5)	1	4	0	3	9	2	8	1	7	0	2
(6, 6)	2	5	1	4	0	3	9	2	8	1	2
(6, 7)	0	6	2	5	1	4	0	3	9	2	2
(6, 8)	1	7	0	6	2	5	1	4	0	3	2
(6, 9)	2	8	1	7	0	6	2	5	1	4	2
(6, 10)	3	9	2	8	1	7	0	6	2	5	1
(6, 11)	4	0	3	9	2	8	1	7	0	6	1
(6, 12)	5	1	4	0	3	9	2	8	1	7	1
(7, 0)	7	1	8	2	9	3	0	4	1	5	1
(7, 1)	8	2	9	3	0	4	1	5	2	6	1
(7, 2)	9	3	0	4	1	5	2	6	0	7	1
(7, 3)	0	4	1	5	2	6	0	7	1	8	2
(7, 4)	1	5	2	6	0	7	1	8	2	9	2
(7, 5)	2	6	0	7	1	8	2	9	3	0	2
(7, 6)	0	7	1	8	2	9	3	0	4	1	2
(7, 7)	1	8	2	9	3	0	4	1	5	2	2
(7, 8)	2	9	3	0	4	1	5	2	6	0	2
(7, 9)	3	0	4	1	5	2	6	0	7	1	2
(7, 10)	4	1	5	2	6	0	7	1	8	2	2
(7, 11)	5	2	6	0	7	1	8	2	9	3	1
(7, 12)	6	0	7	1	8	2	9	3	0	4	1
(8, 0)	8	3	1	6	1	9	4	2	7	2	2
(8, 1)	9	4	2	7	2	0	5	0	8	3	2
(8, 2)	0	5	0	8	3	1	6	1	9	4	2
(8, 3)	1	6	1	9	4	2	7	2	0	5	2
(8, 4)	2	7	2	0	5	0	8	3	1	6	2
(8, 5)	0	8	3	1	6	1	9	4	2	7	1
(8, 6)	1	9	4	2	7	2	0	5	0	8	2
(8, 7)	2	0	5	0	8	3	1	6	1	9	2
(8, 8)	3	1	6	1	9	4	2	7	2	0	2
(8, 9)	4	2	7	2	0	5	0	8	3	1	2
(8, 10)	5	0	8	3	1	6	1	9	4	2	1
(8, 11)	6	1	9	4	2	7	2	0	5	0	2
(8, 12)	7	2	0	5	0	8	3	1	6	1	2
(9, 0)	9	5	1	0	6	2	1	7	3	2	2
(9, 1)	0	6	2	1	7	3	2	8	4	0	2
(9, 2)	1	7	3	2	8	4	0	9	5	1	1
(9, 3)	2	8	4	0	9	5	1	0	6	2	2
(9, 4)	0	9	5	1	0	6	2	1	7	3	2
(9, 5)	1	0	6	2	1	7	3	2	8	4	2
(9, 6)	2	1	7	3	2	8	4	0	9	5	1
(9, 7)	3	2	8	4	0	9	5	1	0	6	1
(9, 8)	4	0	9	5	1	0	6	2	1	7	2
(9, 9)	5	1	0	6	2	1	7	3	2	8	2
(9, 10)	6	2	1	7	3	2	8	4	0	9	1
(9, 11)	7	3	2	8	4	0	9	5	1	0	1
(9, 12)	8	4	0	9	5	1	0	6	2	1	2
(10, 0)	0	7	4	1	1	8	5	2	2	9	2
(10, 1)	1	8	5	2	2	9	6	3	0	0	2
(10, 2)	2	9	6	3	0	0	7	4	1	1	2
(10, 3)	0	0	7	4	1	1	8	5	2	2	3
(10, 4)	1	1	8	5	2	2	9	6	3	0	2
(10, 5)	2	2	9	6	3	0	0	7	4	1	2
(10, 6)	3	0	0	7	4	1	1	8	5	2	2
(10, 7)	4	1	1	8	5	2	2	9	6	3	2
(10, 8)	5	2	2	9	6	3	0	0	7	4	2
(10, 9)	6	3	0	0	7	4	1	1	8	5	2
(10, 10)	7	4	1	1	8	5	2	2	9	6	2
(10, 11)	8	5	2	2	9	6	3	0	0	7	2
(10, 12)	9	6	3	0	0	7	4	1	1	8	2
(11, 0)	1	9	7	5	3	1	2	0	8	6	1
(11, 1)	2	0	8	6	4	2	0	1	9	7	2
(11, 2)	0	1	9	7	5	3	1	2	0	8	2
(11, 3)	1	2	0	8	6	4	2	0	1	9	3
(11, 4)	2	0	1	9	7	5	3	1	2	0	3
(11, 5)	3	1	2	0	8	6	4	2	0	1	3
(11, 6)	4	2	0	1	9	7	5	3	1	2	2
(11, 7)	5	3	1	2	0	8	6	4	2	0	2
(11, 8)	6	4	2	0	1	9	7	5	3	1	1
(11, 9)	7	5	3	1	2	0	8	6	4	2	1
(11, 10)	8	6	4	2	0	1	9	7	5	3	0
(11, 11)	9	7	5	3	1	2	0	8	6	4	0
(11, 12)	0	8	6	4	2	0	1	9	7	5	1
(12, 0)	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	0
(12, 1)	0	2	1	0	9	8	7	6	5	4	1
(12, 2)	1	0	2	1	0	9	8	7	6	5	2
(12, 3)	2	1	0	2	1	0	9	8	7	6	3
(12, 4)	3	2	1	0	2	1	0	9	8	7	3
(12, 5)	4	3	2	1	0	2	1	0	9	8	3
(12, 6)	5	4	3	2	1	0	2	1	0	9	3
(12, 7)	6	5	4	3	2	1	0	2	1	0	3
(12, 8)	7	6	5	4	3	2	1	0	2	1	2
(12, 9)	8	7	6	5	4	3	2	1	0	2	1
(12, 10)	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
(12, 11)	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(12, 12)	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	0

Aufgabe H14
Da jeder Stein, der in den Eimer i hineingeworfen wird, höchstens i Mal geschwappt werden muß, wählen wir

$$\Phi(j) = c\sum_{i=1}^{k}(k-i)b_i^j$$

als Potentialfunktion, wobei b_i^j die Anzahl der Steine im Eimer i zum Zeitpunkt j ist und c eine Konstante. Die Potentialfunktion ist also die Summe über alle Steine, wie oft ein Stein geschwappt werden kann.
Wir müßen jetzt zeigen, daß beide Operationen amortisiert $O(k)$ Laufzeit haben.

Hineinwerfen(i): Den Stein hineinzuwerfen braucht konstante Zeit. Die Potentialfunktion erhöht sich dabei um $c(k-i)$, wenn man in den Eimer i wirft. Die amortisierten Kosten beim $j$ten Schritt sind also:

$$O(1) + \Phi(j) - \Phi(j-1) = O(1) + c(k-i) = O(k)$$

Schwappen(i): Die Kosten dieser Operation sind proportional zur Anzahl an Steinen im $i$ten Eimer. Die Potentialfunktion sinkt dabei um genau die Größe des $i$ten Eimers. Die amortisierte Laufzeit beim $j$ten Schritt ist also

$$O(b_i^j) + \Phi(j) - \Phi(j-1) = O(b_i^j) - cb_i^j \leq 0$$

für ein genügend groß gewähltes c.

Da das alle mögliche Operationen sind, haben wir bewiesen, daß alle eine amortisierte Laufzeit von $O(k)$ haben.

Aufgabe H15